

Seminar 11 (Ispitivanje domene i globalnih svojstava funkcije)

Prvo ponoviti/naučiti sadržaje na sljedećoj strani, a zatim riješiti zadatke na ovoj stranici.

Priprema

Ove zadatke možete riješiti koristeći se grafom i domenom elementarnih funkcija. Vidjeti grafove nacrtane u seminaru 3. U obzir dolaze osnovne elementarne funkcije: kvadratna, kubna, drugi i treći korijen, eksponencijalna, logaritamska, te sve trigonometrijske i ciklometrijske.

(1) Navesti sve elementarne funkcije koje su parne.

(2) Navesti sve elementarne funkcije koje su neparne.

(3) Navesti sve elementarne funkcije koje imaju asimptote (vertikalne, horizontalne ili kose). Za svaku funkciju koju navedete zapisati sve postojeće asimptote.

Određivanje domene i neprekidnosti funkcije. Domena funkcije koja je dobivena kao kompozicija elementarnih računskih operacija i elementarnih funkcija računa se kao u zadacima s 3. strane seminara 2. Važno je poznavati domenu svake pojedine elementarne funkcije.

Važno! Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne na cijeloj svojoj domeni, osim možda u točkama prekida domene (vidi tangens i kotangens). Isto tako, elementarne računске operacije simbolima rezultiraju neprekidnim funkcijama, osim što dijeljenje može uvesti prekid kada je nazivnik nula.

Omeđenost neprekidne funkcije. Važno! Neprekidna funkcija omeđena je na svakom intervalu u domeni (vidi Teorem 3.3.11 na strani 145). Eventualno, neprekidna funkcija može biti neomeđena samo na rubovima domene (uključujući $\pm\infty$). Stoga je za utvrđivanje eventualne neomeđenosti neprekidne funkcije dovoljno ispitati postojanje kosih asimptota i vertikalnih asimptota na rubovima domene.

Asimptote. Asimptota je pravac uz koji priliježe graf funkcije kada se točka na grafu odmiče sve dalje. Drugim riječima, asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost.

Funkcija može imati:

- vertikalnu asimptotu u točki c s lijeve strane: pravac $x = c$ kada je $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$,
- vertikalnu asimptotu u točki c s desne strane: pravac $x = c$ kada je $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$,
- horizontalnu asimptotu u lijevoj strani: pravac $y = b$ kada je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$,
- horizontalnu asimptotu u desnoj strani: pravac $y = b$ kada je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$,
- kosu asimptotu u lijevoj strani: pravac $y = ax + b$ kada je $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$,
- kosu asimptotu u desnoj strani: pravac $y = ax + b$ kada je $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$.

Vertikalna asimptota može se nalaziti u točki prekida ili na otvorenom rubu domene. Horizontalnu asimptotu možemo promatrati kao primjer kose asimptote za koju je koeficijent nagiba $a = 0$. Funkcija na lijevoj i desnoj strani može imati različite asimptote. Međutim, na jednoj strani funkcija može imati samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu. Npr., ako funkcija ima na desnoj strani horizontalnu asimptotu, onda ne može imati na desnoj strani još i neku dodatnu kosu asimptotu.

Kose asimptote ispitane su u primjerima iz dodatka 5.

Parnost i neparnost. Parna funkcija f za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$ zadovoljava $f(x) = f(-x)$. Graf parne funkcije je zrcalno simetričan s obzirom na y -os. To znači da je graf u lijevoj poluravnini zrcalni odraz grafa iz desne poluravnine. Neparna funkcija f za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$ zadovoljava $-f(x) = f(-x)$. Graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište. To znači da za svaku točku grafa T_1 postoji druga točka grafa T_2 takva da je ishodište na polovištu dužine $\overline{T_1T_2}$. Sjetiti se ispitivanja neparnosti na seminaru 3.

Važno! Zbog svega navedenog parnoj ili neparnoj funkciji dovoljno je ispitati ponašanje na desnoj poluravnini ($x \geq 0$), koje se na ostatak domene prenosi po parnosti ili neparnosti.

Periodičnost. Vidi definiciju 3.1.4 iz knjige. Funkcija je periodična ako postoji broj $P > 0$ (koji se naziva period) takav da vrijedi oboje:

- (1) ako je $x \in \mathcal{D}(f)$ tada je $x \pm P \in \mathcal{D}(f)$
- (2) ako je $x \in \mathcal{D}(f)$ tada je $f(x) = f(x \pm P)$

Lako se vidi da ako je P period da je tada svaki pozitivan višekratnik od P opet period. Najmanji period se naziva osnovni period.

Ponašanje periodične funkcije dovoljno je ispitivati na jednom periodu, a što se na ostatak domene prenosi po periodičnosti.

Među osnovnim elementarnim funkcijama periodične su samo trigonometrijske funkcije:

- sinus i kosinus s osnovnim periodom 2π ,
- tangens ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) i kotangens ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$) s osnovnim periodom π .

Glavni dio seminara

U sljedećim primjerima za dane funkcije treba odrediti:

- domenu,
- asimptote: *ispituju se na rubovima domene ili u točkama prekida,*
- globalna svojstva
 - omeđenost: *zaključak izvodimo iz asimptota,*
 - parnost i neparnost: *uspoređujemo $f(-x)$ sa $f(x)$ i $-f(x)$,*
 - periodičnost: *na osnovi periodičnosti trigonometrijskih funkcija.*

Primjer 1. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Primjer 2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Primjer 3. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Vidi <http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node107.html>

Primjer 4. $f(x) = \frac{15 + 8x + x^2}{9 - x^2}$

Primjer 5. $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + x}$

Vidi <http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node108.html>

Primjer 6. $f(x) = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$

Primjer 7. $f(x) = \arcsin(\ln(x^2 - 4))$

Primjer 8. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x)}$

Primjer 9. $f(x) = e^x \tan x$

Primjer 10. $f(x) = x e^{\frac{1}{x^2-1}}$

Vidi <http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node109.html>