

4.3. JEDNADŽBE S PARAMETROM

Osim nepoznanice x u jednadžbi se pojavljuje i neki opći broj, zovemo ga parametrom. Rješenje ne mora ispasti konkretan broj već ono može ovisiti o tom parametru. Zbog toga provodimo raspravu tj. diskusiju.

Primjer: Riješimo sljedeće jednadžbe u kojima je a parametar, a x nepoznanica

a) $2ax - 3 = ax + 5$

$$\begin{aligned} 2ax - x &= 5 + 3 \\ (2a - a)x &= 8 \\ ax &= 8 \end{aligned}$$

1. slučaj:

$a = 0$ s tim ne smijemo dijeliti

\Rightarrow

$$\begin{aligned} ax &= 8 / : a \\ 0 \cdot x &= 8 \\ 0 &= 8 \end{aligned}$$

matematička laž \Rightarrow nema rješenja

2. slučaj:

$a \neq 0$ s tim smijemo dijeliti

\Rightarrow

$$ax = 8 / : a$$

$$\boxed{x = \frac{8}{a}}$$

b) $ax - 2a + x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} ax + x &= 2a - 3 \\ (a + 1)x &= 2a - 3 \end{aligned}$$

1. slučaj:

$a + 1 = 0$ s tim ne smijemo dijeliti

$$a = -1$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} (a + 1)x &= 2a - 3 \\ 0 \cdot x &= 2(-1) - 3 \\ 0 &= -5 \end{aligned}$$

matematička laž \Rightarrow nema rješenja

2. slučaj:

$a + 1 \neq 0$ s tim smijemo dijeliti

$$a \neq -1 \quad \Rightarrow$$

$$(a + 1)x = 2a - 3 / : (a + 1)$$

$$\boxed{x = \frac{2a - 3}{a + 1}}$$

Primjer: Prodiskutirajmo jednadžbu ovisno o realnom parametru a : $a^2(x + 1) = x + a$

Rj:

$$\begin{aligned} a^2(x + 1) &= x + a \\ a^2x - x &= -a^2 + a \\ (a^2 - 1)x &= -(a^2 - a) \\ (a - 1)(a + 1)x &= -a(a - 1) \end{aligned}$$

1. slučaj:

$a - 1 = 0$ ne smijemo dijeliti s tim

$$\boxed{a = 1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (a - 1)(a + 1)x &= -a(a - 1) \\ 0 \cdot 2 \cdot x &= -1 \cdot 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

matematička istina \Rightarrow rješenje su svi realni brojevi

tj. jednadžba je neodređena

2. slučaj:

$$\begin{aligned} a - 1 &\neq 0 \\ a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

=> ne smijemo dijeliti s $a + 1 = 0$

$$\begin{aligned} a = -1 \quad \Rightarrow \quad (a - 1)(a + 1)x &= -a(a - 1) \\ -2 \cdot 0 \cdot x &= -1 \cdot 2 \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$

matematička laž => nema rješenja

3. slučaj:

$$\begin{aligned} \text{za } \boxed{a \neq 1, a \neq -1} \\ a - 1 &\neq 0 \\ a + 1 &\neq 0 \end{aligned}$$

smijemo s njima podijeliti

$$(a - 1)(a + 1)x = -a(a - 1) / : (a - 1)(a + 1)$$

$$x = \frac{-a(a - 1)}{(a - 1)(a + 1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{a}{a + 1}}$$

Primjer: Prodiskutirajmo jednadžbu ovisno o parametrima a i b:

Rj:

$$ax - b = a + bx$$

$$ax - bx = a + b$$

$$(a - b)x = a + b$$

1. slučaj:

$$a - b \neq 0$$

$$a \neq b$$

=>

$$(a - b)x = a + b / : (a - b)$$

$$x = \frac{a + b}{a - b}$$

2. slučaj:

$$a - b = 0$$

$$a = b$$

=>

$$(a - b)x = a + b$$

$$0 \cdot x = 2a$$

a)

$$a \neq 0$$

$$0 \neq 2a$$

nema rješenja

b)

$$a = 0$$

$$0x = 0$$

Svaki x je rješenje tj. svi realni brojevi su rješenje

Primjer: Prodiskutirajmo jednadžbu u kojoj je a parametar, a x nepoznanica:

Rj:

$$a^2(x - 1) = ax - 1$$

$$a^2x - a^2 = ax - 1$$

$$a^2x - ax = a^2 - 1$$

$$(a^2 - a)x = a^2 - 1$$

$$a(a - 1)x = (a + 1)(a - 1)$$

1. slučaj:

$$a - 1 = 0 \quad \text{ne smijemo dijeliti s tim}$$

$$\boxed{a = 1}$$

=>

$$a(a - 1)x = (a + 1)(a - 1)$$

$$1 \cdot 0 \cdot x = 2 \cdot 0$$

$$0 = 0$$

matematička istina => rješenje su svi realni brojevi
tj. jednačba je neodređena

2.slučaj:

$$a - 1 \neq 0$$

$$a = 0$$

=> ne smijemo dijeliti s a

$$a(a - 1)x = (a + 1)(a - 1)$$

$$\boxed{a = 0} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot (-1) \cdot x = 1 \cdot (-1)$$

$$0 = -1$$

matematička laž => nema rješenja

3.slučaj:

$$\boxed{a - 1 \neq 0}$$

$$\boxed{a \neq 0}$$

smijemo s tim podijeliti

$$a(a - 1)x = (a + 1)(a - 1) / : a(a - 1)$$

$$x = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a(a - 1)}$$

=>

$$\boxed{x = \frac{a + 1}{a}}$$