

Postupak crtanja grafa funkcije:

1. Odrediti domenu funkcije
2. Odrediti sjecišta funkcije s koordinatnim osima:
 - sjecište s osi x dobijemo za $y = 0$
 - sjecište s osi y dobijemo za $x = 0$
3. Odrediti asimptote funkcije (ako ih zadana funkcija ima)
4. Odrediti intervale monotonosti i ekstreme funkcije
5. Odrediti točke infleksije i intervale konkavnosti i konveksnosti

Zadatak 1. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Rješenje:

1. $D(f) = \mathbf{R}$ (zadana funkcija je polinom)

2. Odredimo presjeke s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 + 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$$

\Rightarrow presjek s osi y je u točki $(0,0)$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$$

\Rightarrow presjek s osi x je u točkama: $(0,0)$, $(2,0)$ i $(-3,0)$

3. Asimptota nema

4. $y' = 3x^2 + 2x - 6$

Stacionarne točke odredimo iz uvjeta: $y' = 0$

$$3x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.1, x_2 = -1.8$$

$$y'' = 6x + 2$$

$$y''(1.1) = 8.6 > 0 \Rightarrow m(1.1, f(1.1)) = (1.1, -4.1)$$

$$y''(-1.8) = -8.8 < 0 \Rightarrow M(-1.8, f(-1.8)) = (-1.8, 8.2)$$

Provjerimo intervale monotonosti:

	$-\infty$	-1.8	1.1	$+\infty$
$y' = 3x^2 + 2x - 6$	+	-	+	
y	↗	↘	↗	

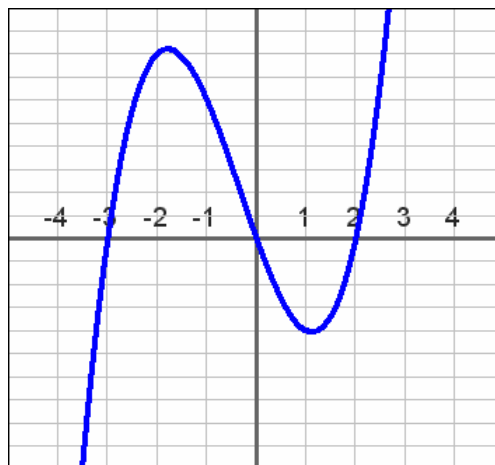
5. Točke infleksije odredimo iz uvjeta: $y'' = 0$

$$6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} = -0.3$$

$$\text{Točka infleksije: } (-0.3, f(-0.3)) = (-0.3, 1.9)$$

Provjerimo intervale konkavnosti i konveksnosti:

	$-\infty$	-0.3	$+\infty$
$y'' = 6x + 2$	-	+	
y	∩	∪	



Slika 1. Graf funkcije $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

✓

Zadatak 2. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = -x^4 + 4x^2$

Rješenje:

1. $D(f) = \mathbf{R}$ jer je zadana funkcija polinom

2. Presjeci s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow \text{graf prolazi kroz ishodište } \boxed{(0,0)}$$

$$y = 0 \Rightarrow -x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow -x^2(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{sjecište s osi } x \text{ su točke } \boxed{(0,0), (2,0) \text{ i } (-2,0)}$$

3. Budući je zadana funkcija polinom ona nema asimptota

$$4. f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 2) = 0$$

\Rightarrow stacionarne točke su $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2} = 1.4$, $x_3 = -\sqrt{2} = -1.4$, a vrijednosti funkcije u tim točkama su:

$$f(0) = 0, f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4 = f(-\sqrt{2})$$

$$f''(x) = -12x^2 + 8$$

$$f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 8 = 8 > 0 \Rightarrow \boxed{m(0,0)}$$

$$f''(\sqrt{2}) = -12(\sqrt{2})^2 + 8 = -16 < 0 \Rightarrow \boxed{M_1(1.4, -4)}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = -12(-\sqrt{2})^2 + 8 = -16 < 0 \Rightarrow \boxed{M_2(-1.4, -4)}$$

	$-\infty$	-1.4	0	1.4	$+\infty$
$f'(x) = -4x^3 + 8x$	+	-	+	-	
f	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	

5. $f''(x) = -12x^2 + 8$

$$-12x^2 + 8 = 0$$

$$12x^2 = 8$$

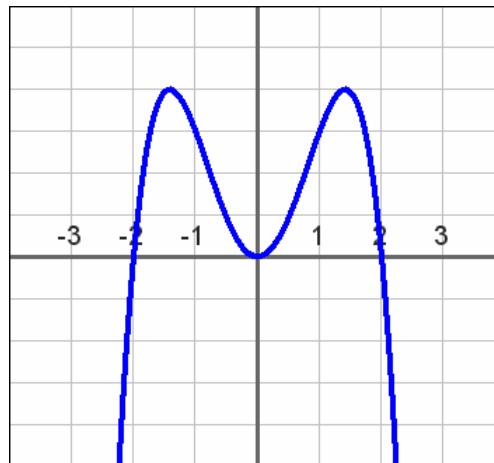
$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm 0.8$$

Točke infleksije: $T_1(-0.8, 0.1), T_2(0.8, 0.1)$

Oredimo još intervale konakvnosti i konveksnosti:

	$-\infty$	-0.8	0.8	$+\infty$
$f''(x) = -12x^2 + 8$	-	+	-	
f	\cap	\cup	\cap	



Slika 2. Graf funkcije $f(x) = -x^4 + 4x^2$

✓

Zadatak 3. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

Rješenje:

1. $D(f) = \mathbf{R}$ jer je zadana funkcija polinom

2. Sjecišta s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0-1)^2(0+1)^2 = 1 \Rightarrow \text{sjecište s osi } y \text{ je točka } \boxed{(0,1)}$$

$$y = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow \text{sjecište s osi } x \text{ su točke } \boxed{(1,0)} \text{ i } \boxed{(-1,0)}$$

3. Budući je zadana funkcija polinom nema asimptota

4. Odredimo ekstreme i intervale monotonosti:

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^2 + (x-1)^2 \cdot 2(x+1) = 2(x-1)(x+1)[x+1+x-1] = 4x(x-1)(x+1)$$

\Rightarrow stacionarne točke su $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$4x$	-	-	+	+	
$x-1$	-	-	-	+	
$x+1$	-	+	+	+	
predznak f'	-	+	-	+	
funkcija f	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	

Radi lakšeg računanja druge derivacije, prvu derivaciju napišimo u obliku:

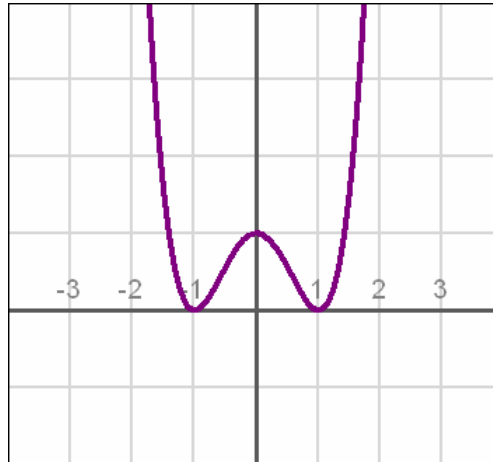
$$f'(x) = 4x(x-1)(x+1) = 4x(x^2-1) = 4x^3-4x$$

Tada je $f''(x) = 12x^2 - 4$

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow M(0, f(0)) \Rightarrow \boxed{M(0,1)}$$

$$f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow m(-1, f(-1)) \Rightarrow \boxed{m(-1,0)}$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow m(1, f(1)) \Rightarrow \boxed{m(1,0)}$$



Slika 3. Graf funkcije $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

✓

Zadatak 4. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Rješenje:

1. Odredimo domenu. Budući je zadana funkcija racionalna funkcija, domenu čine svi realni brojevi bez nultočki nazivnika:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0 \\x^2 &= 1 \\x &= \pm 1\end{aligned}$$

Dakle, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$

2. Odredimo presjeke zadane funkcije s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{0}{0^2 - 1} = 0 \Rightarrow \text{funkcija prolazi kroz ishodište } \boxed{(0,0)}$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $x = -1$ i $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x / : x^2}{x^2 - 1 / : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0} = 0 \Rightarrow \text{pravac } y = 0 \text{ je horizontalna asimptota}$$

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

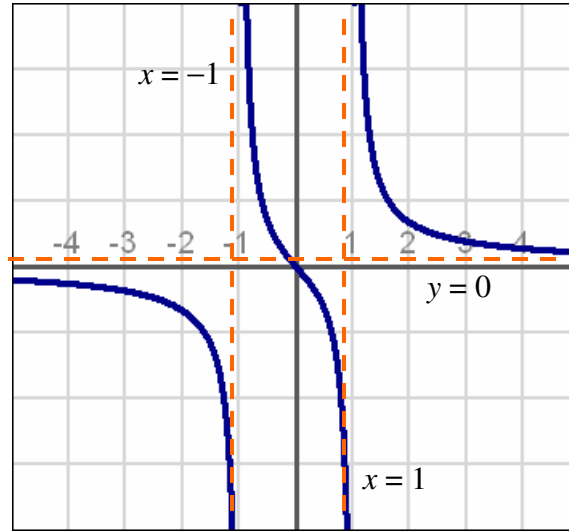
$$y' = \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

Stacionarne točke određujemo iz uvjeta: $y' = 0$

$$\frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

Ova kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, tj. zadana funkcija nema stacionarne točke, tj. zadana funkcija nema ekstrema. U tom slučaju, funkcija je ili stalno rastuća ili stalno padajuća (odredimo po predznaku prve derivacije)

$$y' = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow \text{funkcija je stalno padajuća}$$



Slika 4. Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

✓

Zadatak 5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Rješenje:

1. $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

2. $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0 \Rightarrow$ funkcija prolazi kroz ishodište $\boxed{(0,0)}$

3. **Vertikalna asimptota** je pravac $\boxed{x = -1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / : x^2}{x+1 / : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0+0} = \infty \Rightarrow \text{funkcija nema horizontalnu asimptotu}$$

Potražimo kosu asimptotu: $y = kx + l$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / : x^2}{x^2 + x / : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x / : x}{x+1 / : x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

Kosa asimptota je pravac $y = x - 1$

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Odredimo stacionarne točke:

$$\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

Stacionarne točke su $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Koja vrsta ekstrema (minimum ili maksimum) se nalazi u kojoj stacionarnoj točki, odredit ćemo preko pada i rasta funkcije, tj. preko predznaka prve derivacije:

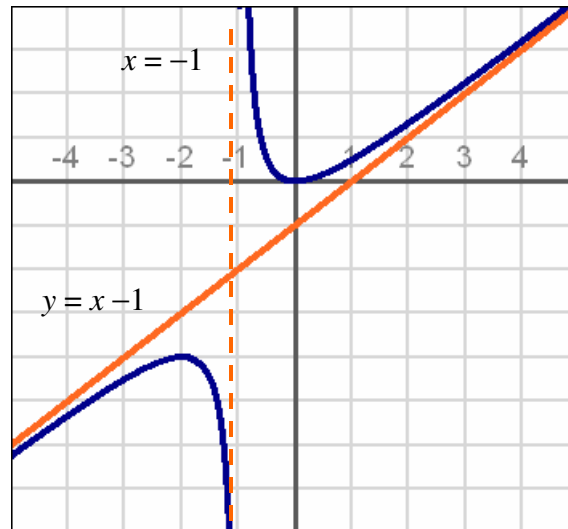
	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$		+	-	+
y				

Iz tablice se vidi da funkcija ima maksimum u $x = -2$ (lijevo od te točke funkcija je rastuća, a desno od te točke funkcija je padajuća). Odredimo još vrijednost funkcije u toj točki kako bismo imali točne koordinate maksimuma.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Dakle, **maksimum funkcije** se nalazi u točki $M(-2,-4)$.

Analogno, **minimum funkcije** je u točki $x = 0$, tj. $m(0,0)$.



Slika 5. Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

✓

Zadatak 6. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3}$

Rješenje:

1. Nultočke nazivnika su $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$, pa je domena funkcije $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1,3\}$

2. Presjeci s koordinatnim osima:

$$x = 0: y = f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 10}{0^2 - 4 \cdot 0 + 3} = -\frac{10}{3} = -3.3$$

Funkcija siječe os y u $(0, -3.3)$

$$y = 0: \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$$

Funkcija siječe os x u točkama $\boxed{(-1,0)}$ i $\boxed{(5,0)}$

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $\boxed{x = 1}$ i $\boxed{x = 3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8x - 10 / : x^2}{x^2 - 4x + 3 / : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{8}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Horizontalna asimptota je pravac $\boxed{y = 2}$

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3} \right)' = \frac{(4x - 8)(x^2 - 4x + 3) - (2x^2 - 8x - 10)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 16x^2 + 12x - 8x^2 + 32x - 24 - 4x^3 + 8x^2 + 16x^2 - 32x + 20x - 40}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \\ &= \frac{32x - 64}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{32(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \end{aligned}$$

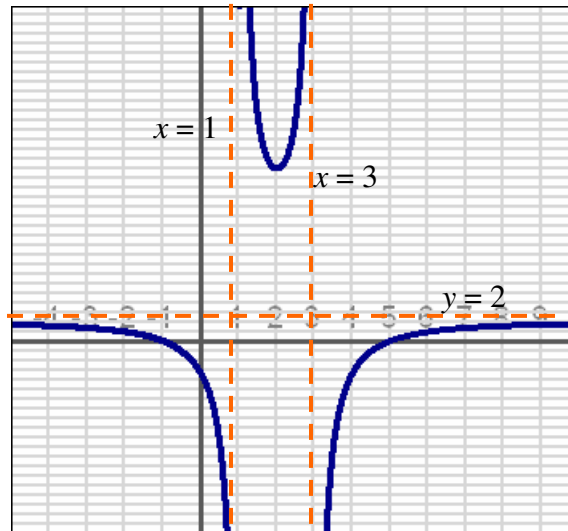
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{32(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow 32(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ stacionarna točka}$$

	$-\infty$	2	$+\infty$
$y' = \frac{32(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$		-	+
y			

Iz tablice se vidi da funkcija ima minimum u $x = 2$ (lijevo od te točke funkcija je padajuća, a desno od te točke funkcija je rastuća). Odredimo još vrijednost funkcije u toj točki kako bismo imali točne koordinate minimuma.

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 10}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = \frac{-18}{-1} = 18$$

Dakle, **minimum** zadane funkcije nalazi se u $(2, 18)$



Slika 6. Graf funkcije $f(x) = \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3}$

✓

Zadatak 7. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Rješenje:

1. $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$

2. Nađimo sjecišta funkcije s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{graf siječe } y \text{ os u točki } \left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ što nije istina, dakle, funkcija ne siječe } x \text{ os}$$

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $x = 2$ i $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2}{x^2 - 4/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{horizontalna asimptota je pravac } y = 0$$

4. Ispitajmo sada monotonost i nađimo lokalne ekstreme:

$$y' = \frac{1'(x^2 - 4) - 1 \cdot (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ je stacionarna točka}$$

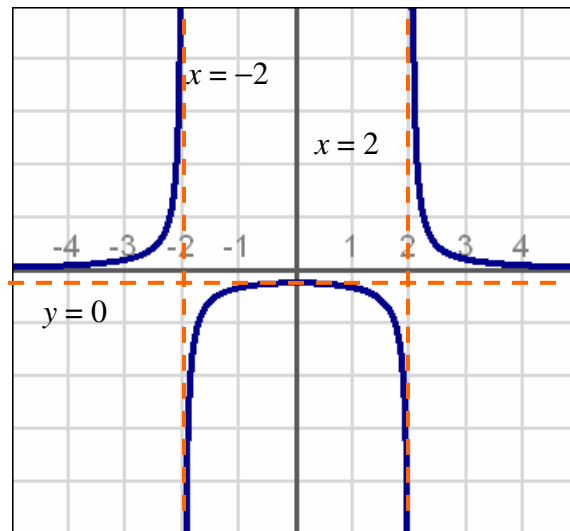
Napravimo sada tablicu predznaka prve derivacije:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$		+	-
y			

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{2(x^2 - 4)[-x^2 + 4 + 4x^2]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{2(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot 4}{(-4)^3} = \frac{8}{-64} = -\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow \text{funkcija ima maksimum za } x = 0, \text{ tj. } M\left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

Napomena: u ovom zadatku smo provjerili o kojem se ekstremu radi u stacionarnoj točki $x = 0$ pomoću druge derivacije. Da se u stacionarnoj točki $x = 0$ radi o maksimumu mogli smo utvrditi i iz tablice predznaka prve derivacije.



Slika 7. Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

✓