

# Temperaturna ovisnost električnog otpora metala

## UVOD

Toplina je oblik energije koji se prenosi s tijela na tijelo ili s jednog njegovog kraja na drugi. Mehanizmi prijenosa topline su različiti, jednako kao i doprinosi svakoga od njih u količini ukupno prenesene energije iz jedne točke u drugu. Razlikujemo prijenos vođenjem (**kondukcijom**), strujanjem (**konvekcijom**) i zračenjem (**radijacijom**).

Rad i toplina oblici su energije u kojima energija prelazi iz jednog sustava na drugi ili iz sustava na okolinu. Zato se energija sustava definira kao mjera koja pokazuje kolika je mogućnost tog sustava da obavi rad ( $W$ ) ili proizvede toplinu ( $Q$ ). Kada sustav izmjenjuje energiju s nekim drugim sustavom, njegova se unutarnja energija ( $U$ ) mijenja. Taj prirast (promjena) unutarnje energije jednoznačno je određen početnim i konačnim stanjem sustava. Ako se unutarnja energija sustava mijenja pri konstantnoj temperaturi, energija se prenosi kao rad, jer je za izmjenu topline potrebna razlika u temperaturi.

Ako u nekom sredstvu postoji temperaturna razlika, toplinska će energija vođenjem prelaziti s mjesta više temperature prema mjestu niže temperature. Tako se toplina prenosi kroz čvrsta tijela. U fluidima se toplina obično prenosi konvekcijom. Za razliku od vođenja, gdje se prijenos topline ostvaruje molekularnim gibanjem, a samo sredstvo miruje, pri prenošenju topline konvekcijom, giba se i samo sredstvo. Zbog toga je prijenos konvekcijom i moguć samo u tekućinama i plinovima. Vođenje topline u fluidima dolazi do izražaja jedino ukoliko prijenos strujanjem nije moguć. Pri prijenosu topline zračenjem toplinska energija tijela pretvara se u elektromagnetsko zračenje koje tijelo emitira u okolni prostor. Energija koja se zračenjem prenosi od jednog do drugog mjesta bitno ovisi o temperaturi tijela.

Temperatura je fizikalna veličina kojom se izražava toplinsko stanje neke tvari i jedna je od osnovnih veličina u termodinamici. Ona ovisi o tome koliko unutarnje energije sadrži neko tijelo određene mase i tlaka. Temperatura ne može prelaziti s tijela na tijelo, nego prelazi toplina, a temperature se izjednačavaju.

U ovisnosti o temperaturi mijenja se i otpor metala. Kod čistih metala (bakar, aluminij, zlato, srebro, itd.) otpor raste s porastom temperature. Kod nekih legura otpor se ne mijenja s temperaturom. Otpor ugljena, čak i pada kada ga zagrijavamo.

## TEORIJSKI DIO

Osnovni zakon elektrotehnike je Ohmovog zakona, a govori o odnosu jakosti električne struje ( $I$ ) i napona ( $U$ ) u strujnom krugu. Eksperimentalno je utvrđeno da je jakost struje kroz vodič proporcionalan naponu na njegovim krajevima a konstanta proporcionalnosti je otpor strujnog kruga ( $R$ )

$$I = \frac{U}{R}, \quad (3-1)$$

gdje je  $R$  ukupan otpor strujnog kruga (otpor trošila + otpor električnih vodiča + unutarnji otpor izvora struje). Električni otpor vodiča je svojstvo samog materijala, a ovisi o duljini vodiča ( $l$ ), površini poprečnog presjeka ( $S$ ) vodiča i o specifičnom otporu ( $\rho$ ) koji ovisi o vrsti materijala.

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (3-2)$$

Materije s puno slobodnih elektrona dobro provode struju. To su u prvom redu metali, a posebno mali otpor imaju srebro i bakar. Od njih se izrađuju električni vodovi. Željezo ima oko 7 puta veći otpor od bakrenog vodiča istih dimenzija. Veliki specifični otpor karakterizira izolatore. Neki materijali pružaju umjereno veliki otpor prolasku struje, pa se zato koriste za namjerno zagrijavanje žice ili medija kojim prolaze ili za povećanje otpora strujnih krugova, odnosno od njih se izrađuju električni grijači i otpornici.

Eksperimentalno je utvrđeno da otpor vodiča (metala) raste porastom temperature. Atomi čistog metala zauzimaju pravilan, periodički prostorni raspored tvoreći kristalnu rešetku. Oni se u kristalnoj rešetki oscilatorno gibaju (titraju) oko svojih ravnotežnih položaja. Povećanjem temperature, amplitude titranja atoma metala se povećavaju. Time se povećava i

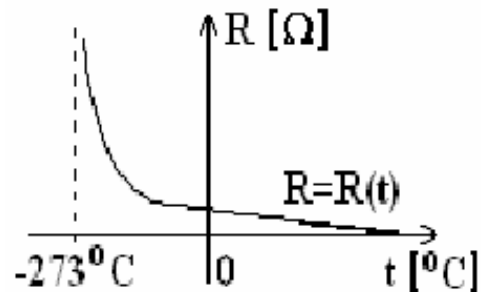
srednji broj sudara slobodnih elektrona s oscilirajućim atomima rešetke.

Kod poluvodiča postoje dvije vrste slobodnih nositelja naboja; elektroni i pozitivne šupljine. Njihov broj kod čistog poluvodiča jako ovisi o temperaturi. Što je temperatura viša, to veći broj elektrona iz valentne vrpce dobije dovoljnu energiju da prijeđe u vodljivu vrpcu. Na taj način se znatno poveća broj slobodnih nositelja naboja. I ovdje, kao i kod metala, dolazi do većih vibracija čvorova rešetke uslijed čega se poveća broj sudara slobodnih nositelja naboja s atomima pri povećanju temperature. Međutim, porast otpora uslijed ovog faktora, nekoliko puta je manji od porasta vodljivosti (smanjenja otpora), koji je uvjetovan povećanjem broja slobodnih nositelja naboja. Prema tome, povećanjem temperature otpor poluvodiča se brzo smanjuje (sl.3.1.)

Relacija koja povezuje otpor poluvodiča i apsolutne temperature  $T$  je:

$$R = R_0 e^{\frac{B}{T}}, \quad (3-3)$$

gdje su  $R_0 [\Omega]$  i  $B [K^{-1}]$  konstante koje karakteriziraju određeni poluvodič.



Sl. 3.1. Ovisnost otpora poluvodiča o temperaturi

## Ovisnost električnog otpora o temperaturi

Ekperimentalna istraživanja ovisnosti električnog otpora metala o temperaturi ( $t$ ) pokazuju karakteristično povećanje električnog otpora. Ta ovisnost otpora metala o promjeni temperature dana je izrazom

$$R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2 + \gamma \cdot t^3 + \dots), \quad (3-4)$$

gdje je  $R_t$  otpor vodiča na temperaturi  $t$ ,  $R_0$  otpor na  $t_0=0$  °C,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,... su temperaturni koeficijenti otpora. Za uobičajeni temperaturni interval ( $0^\circ - 100^\circ \text{C}$ ), koeficijenti  $\beta$ ,  $\gamma$ ,... su jako male vrijednosti u odnosu na  $\alpha$ , pa se članovi koji ih sadrže mogu zanemariti. Na taj način dobiva se izraz

$$R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t). \quad (3-5)$$

Na temelju toga dolazi se do izraza za određivanje specifičnog otpora vodiča  $\rho$  na temperaturi  $t$ , kada je poznat njegov specifični otpor  $\rho_0$  na  $0^\circ \text{C}$  i temperaturni koeficijent  $\alpha$ . Za interval temperature  $0^\circ \text{C} - 100^\circ \text{C}$  vrijedi

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot t). \quad (3-6)$$

Temperaturni koeficijent električnog otpora govori za koliko se promjeni električni otpor prilikom promjene temperature za  $1^\circ \text{C}$  (ili za  $1 \text{ K}$ )

$$\alpha = \frac{R_t - R_0}{R_0 t}. \quad (3-7)$$

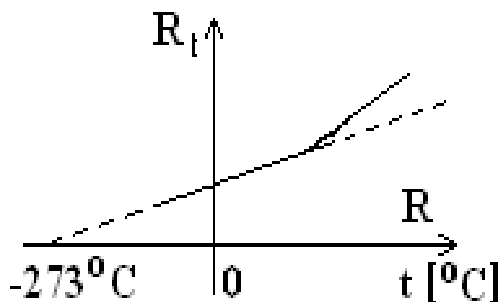
Temperaturni koeficijent električnog otpora je za sve metale približno isti i iznosi

$$\alpha = \frac{1}{250} [^\circ\text{C}^{-1}] = 0.004 [^\circ\text{C}^{-1}], \quad (3-8)$$

a vrijednost mu je približno jednaka vrijednosti temperaturnog koeficijenta širenja plinova,

$$\gamma = \frac{1}{273} [^\circ\text{C}^{-1}].$$

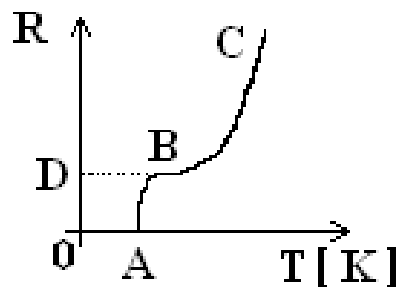
Ovisnost otpora vodiča o temperaturi izražena je relacijama (3-4), (3-5) grafički je prikazana na sl. 3.2. Otpor linearno opada s temperaturom i na temperaturi vrlo bliskoj apsolutnoj nuli ( $-273^\circ \text{C}$ ) postaje jednak nuli.



Sl. 3.2. Ovisnost otpora vodiča o temperaturi

No, neki vodiči se na niskim temperaturama ne ponašaju onako kako predviđa relacija (3-4). Jedni vodiči na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli imaju otpor veći od nule. Njihovo ponašanje prikazano je krivuljom CBD na sl.3.3., a druga grupa vodiča pokazuje temperaturnu ovisnost otpora prikazanu krivuljom CBA na sl. 3.3. Kod njih otpor na nekoliko stupnjeva iznad apsolutne nule naglo

opada i postaje jednak nuli. To znači da tada elektroni ne nailaze na otpor pri gibanju kroz vodič.

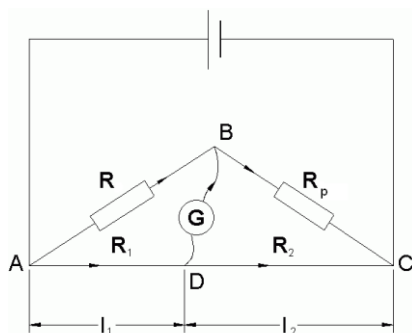


Sl. 3.3. Ovisnost otpora supravodiča o temperaturi

Ovakvi vodiči koji na niskim temperaturama imaju neznatan električni otpor nazivaju se **supravodiči**, a ta pojava **supravodljivost**. To je pojava kod koje je problem razriješen metodama kvantne mehanike. Supravodiči su značajni u tehnici zbog mogućnosti vođenja velikih struja bez gubitaka.

## Wheatstoneov most

Wheatstoneov most je razgranati strujni krug pomoću kojeg mjerimo nepoznati otpor  $R$  uspoređujući ga s poznatim otporom  $R_p$ . Električni sklop sastoji se od dvaju grana (sl.3.4.). Jednu granu (A, B, C) čine otpori  $R$  i  $R_p$  serijski spojeni, a drugu otporna žica (A, C) – klizna žica.



Sl. 3.4. Shema spoja Wheatstoneovog mosta

U točki (C) obje se grane sastaju i vežu na drugi pol izvora elektromotorne sile (E). Za točku (B) vezan je jedan pol mjernog instrumenta velike osjetljivosti (galvanometar), čiji je drugi pol vezan za klizač na kliznoj žici (točka D). Primjenom prvog Kirchoffovog pravila u točki (B), dobivamo jednadžbu

$$I = I_p + I_g \quad (3-9)$$

Kada je most u ravnoteži, struja kroz galvanometar je jednaka 0, jednadžba se pojednostavljuje u oblik

$$I = I_p \quad (3-10)$$

Analognom primjenom Kirchoffovog pravila u točki (D), u slučaju ravnoteže mosta dobivamo jednadžbu

$$I_1 = I_2 \quad (3-11)$$

Napon ( $U$ ), između točaka (A) i (B), predstavlja razliku potencijala u tim točkama, relacija (3-12). Analogno iz relacije (3-12) slijedi i za točke (A) i (D) relacija (3-13)

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (3-12)$$

$$U_{AD} = V_A - V_D \quad (3-13)$$

Koristeći Ohmov zakon, napon ( $U_{AB}$ ) jednak je relaciji (3-14), a napon na kliznoj žici između točaka (A) i (D) je jednak relaciji (3-15)

$$U_{AB} = R \cdot I \quad (3-14)$$

$$U_{AD} = R_1 \cdot I_1, \quad (3-15)$$

gdje je  $R_1$  otpor dijela klizne žice od točke (A) do točke (D), a  $I_1$  struja kroz taj dio žice. Za most u ravnoteži mora vrijediti

$$U_{AB} = U_{AD}. \quad (3-16)$$

Uvrštavanjem relacija (3-14) i (3-15) u relaciju (3-16) dolazi se do relacije (3-17)

$$R \cdot I = R_1 \cdot I_1. \quad (3-17)$$

Ako sada primijenimo istu analogiju za dio kruga koji je određen točkama (B, C i D), dolazi se do relacije

$$R_p \cdot I_p = R_2 \cdot I_2, \quad (3-18)$$

gdje je  $R_2$  otpor dijela klizne žice od točke (C) do točke (D). Ako sada podijelimo relaciju (3-17) i (3-18) i primijenimo jednakosti (3-10) i (3-11), dolazi se do relacije

$$\frac{R}{R_p} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3-19)$$

S obzirom da je cijela klizna žica napravljena od istog materijala, sa specifičnim otporom  $\rho$  te istog presjeka  $S$ , tada su izrazi za električni otpor tih dvaju dijelova žice dani relacijama

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (3-20)$$

$$R_2 = \rho \cdot \frac{L-l}{S}, \quad (3-21)$$

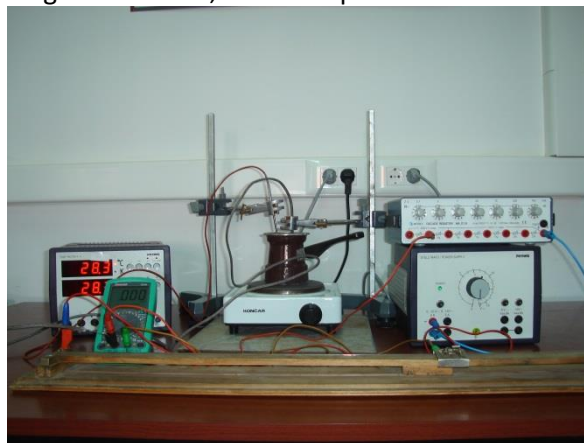
gdje je  $l$  duljina žice od točke (A) do točke (D), a  $L$  duljina cijele klizne žice. Uvrštavanjem relacija (3-20) i (3-21) u relaciju (3-19) dolazi se do izraza za električni otpor nepoznatog otpornika izražen pomoću električnog otpora poznatog otpornika ( $R_p$ )

$$R = \frac{l}{L-l} \cdot R_p. \quad (3-22)$$

## EKSPERIMENTALNI DIO

U okviru laboratorijske vježbe „Temperaturna ovisnost električnog otpora metala“ napraviti će se eksperiment u kojem se istražuje ovisnost električnog otpora metala o temperaturi, te će se odrediti nepoznati otpor mjereći poznati otpor pomoću Wheatstoneovog mosta; i odrediti temperaturni koeficijent električnog otpora metala

Toplinski koeficijent otpora metala određuje se pomoću Wheatstoneovog mosta (sl 3.5). Eksperimentalni postav sastoji se od: Wheatstoneovog mosta, dekade, strujnog izvora, grijača, posude s vodom, tronožne baze, digitalnog termometra, sonde od platine.



Sl. 3.5. Eksperimentalni postav

Mjerenje se vrši tako, da se sonda od platine uroni u vodu i voda se zagrijava. Kako se zagrijava voda tako raste i temperatura sonde. Porastom temperature same sonde mijenja se i nepoznati otpor u strujnom krugu. Tijekom izvođenja eksperimenta potrebno je Wheatstoneov most održavati u ravnoteži tako da za svaku promjenu temperature Wheatstoneov most postavimo u položaj u kojem će voltmetar spojen u zajednički strujni krug pokazivati nulu.

Mjeri se otpor vodiča za svaku promjenu temperature od 5 °C. Električni otpori na temperaturama  $t_1$  i  $t_2$  zadani su jednadžbama

$$R_1 = R_p \cdot (1 + \alpha \cdot t_1), \text{ i} \quad (3-23)$$

$$R_2 = R_p \cdot (1 + \alpha \cdot t_2). \quad (3-24)$$

Eliminacijom otpora  $R_p$ , tj. dijeljenjem ovih jednadžbi dobiva se relacija (3-25) iz kojega slijedi relacija (3-26) za temperaturni koeficijent električnog otpora

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{(1 + \alpha \cdot t_1)}{(1 + \alpha \cdot t_2)}, \text{ i} \quad (3-25)$$

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1}. \quad (3-26)$$

gdje se temperature  $t_1$  i  $t_2$  očitavaju na termometru, a otpori  $R_1$  i  $R_2$  se izračunavaju prema relaciji (3-22).

### POSTUPAK PRI MJERENJU

**1. 1. korak**

Provjerite eksperimentalni postav.

**2. 2. korak**

Očitajte otpor na dekadi ( $R_p$ ).

**3. 3. korak**

Očitajte duljinu klizne žice ( $L$ ) na Wheatstoneovom mostu.

**4. 4. korak**

Uronite platinastu sondu u posudu s hladom vodom.

**5. 5. korak**

Uključite električni grijač i zagrijavajte vodu.

**6. 6. korak**

Mjerenje započinjete kada se voda ugrije do temperature 35°C.

**7. 7. korak**

Pri svakom povećanju temperature od 5°C položaj klizača na Wheatstoneovom mostu podesite tako da voltmetar spojen u strujni krug pokazuje vrijednost nula.

**8. 8. korak**

Zabilježite položaj klizača na Wheatstoneovom mostu.

**9. 9. korak**

Mjerenje ponovite za 10 različitih temperatura.

Ime i prezime:

Matični broj:

Grupa:

Datum:

**LV TEMPERATURNA OVISNOST ELEKTRIČNOG OTPORA METALA**

**Eksperimentalno određivanje toplinskog koeficijenta električnog otpora metala**

**Mjerenje položaja klizača na Wheatstoneovom mostu u ovisnosti o temperaturi sonde**

**RAD U LABORATORIJ**

**1. zadatak**

1. Očitajte otpor na dekadi  $R_p$  i duljinu cijele klizne žice  $L$  na Wheatstoneovom mostu.

$$R_p = \text{_____} \Omega, L = \text{_____} \text{ m.}$$

2. Popunite tablicu 3.1. s vrijednostima temperatura za koje ćete obaviti mjerenja.
3. Za pojedine vrijednosti temperatura, koje ste zadali u **b)** dijelu zadatka, očitajte položaj klizača na Wheatstoneovom mostu ( $l_i$ ) ( $l_i$  – je udaljenost od lijevog kraja žice do klizača). Popunite tablicu 3.1.

**Tablica 3.1.**

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
$t$ [°C]										
$l$ [cm]										
$L-l$ [cm]										
$R$ [Ω]										
$\alpha$ [1/°C]										

**2. zadatak**

1. Prema relaciji (3-22) izračunajte vrijednosti električnog otpora metala ( $R$ ) i popunite tablicu 3.1. Prikažite samo jedan izračun!
2. Prema relaciji (3-26) izračunajte vrijednosti  $\alpha$  - temperaturnog koeficijenta električnog otpora metala i popunite tablicu 3.1. Prikažite samo jedan izračun!

Ime i prezime:

Matični broj:

Grupa:

Datum:

---

TEMPERATURNA OVISNOST ELEKTRIČNOG OTPORA METALA  
**Ekperimentalno određivanje toplinskog koeficijenta  
električnog otpora metala**

**Mjerenje položaja klizača na Wheatstoneovom mostu u ovisnosti o temperaturi  
sonde**

**ANALIZA I RASPRAVA REZULTATA MJERENJA**

**3. zadatak**

1. Izračunajte maksimalnu apsolutnu, maksimalnu relativnu i srednju kvadratnu pogrešku pri eksperimentalnom određivanju toplinskog koeficijenta el. otpora metala. Pogreške pri mjerenju temperatura ( $t$ ) dane su preciznošću mjernog instrumenta, a otpornici  $R_1$  i  $R_2$  su pripadajući otpornici na tim temperaturama. Prilikom ovog izračuna koristite samo jedan par temperatura i otpornika, a vrijednosti pročitajte iz tablice 3.1.

**Izračun:**

1. maksimalna apsolutna pogreška

2. maksimalna relativna pogreška

3. srednja kvadratna pogreška

4. Konačne rezultate upišite u tablicu 3.4.

**Tablica 3.4.** Rezultati statističke analize slučajnih pogrešaka pri posrednom određivanju toplinskog koeficijenta el. otpora

Rezultat mjerenja izražen MAKSIMALNOM APSOLUTNOM pogreškom	Rezultat mjerenja izražen MAKSIMALNOM RELATIVNOM pogreškom	Rezultat mjerenja izražen SREDNJOM KVADRATNOM pogreškom

5. Obrazložite dobivenu pogrešku! Što je utjecalo na rezultate mjerenja s obzirom na dobivenu pogrešku?

**4. zadatak**

1. U MS Excell-u obradite mjerne podatke iz tablice 3.1. tako da prikazete ovisnost  $R=f(t)$ . Ulijepite graf na za to predviđeno mjesto. Istaknite jednadžbu regresije na grafu. Imenujte koordinatne osi i graf!

2. Je li grafički prikaz prema relaciji (3-5) pokazuje linearnu ovisnost otpora o temperaturi? Objasnite!



1. Napišite dobivenu jednadžbu regresijskog pravca u eksplicitnom obliku. Regresijski pravac ucrtajte u gr. 3.1.

$$y = ax + b = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Služeći se dobivenom jednadžbom regresijskog pravca i relacije (3-5) odredite otporplatinateperaturi  $0^{\circ}\text{C}$  -  $R_0$  i izračunajte temperaturnikoefficijentelektričnogotporaplatine -  $\alpha$ .

Izračun:

$$R_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Koristeći se jednadžbom regresijskog pravca, relacije (3-5) i otpora platine na temperaturi  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $R_0$ , (određenom u prethodnom koraku) izračunajte toplinski koeficijent električnog otpora metala.

Izračun:

$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

### **5. zadatak**

Objasnite linearnu korelaciju između danih mjernih podataka s obzirom na dobivenu vrijednost koeficijenta korelacije  $R$ .

### **6. zadatak**

Procijenite točnost mjerenja temperaturnog koeficijenta električnog otpora platine -  $\alpha$ , tako da izračunate relativnu pogrešku pri određivanju temperaturnog koeficijenta električnog otpora metala. Teorijska vrijednost temperaturnog koeficijenta električnog otpora metala dana je relacijom (3-8).

### **7. zadatak**

Navedite koje bi pogreške (sistematske, slučajne) najviše mogle utjecati na rezultate mjerenja u ovom eksperimentu.

**8. zadatak**

Volframovom niti električne žarulje pri temperaturi 25 °C teče struja jakosti 4 mA uz napon 10 mV. Pri naponu 110 V nit je užarena i njome teče struja jakosti 4 A. Kolika je temperatura užarene niti kada teče struja 4 A?

**9. zadatak**

Koliki je električni otpor ugljene niti duljine 50 cm i poprečnog presjeka 0,2 mm<sup>2</sup> pri temperaturi bijelog zračenja, tj. pri temperaturi od 1600 °C?