Seminar 2

Potrebno predznanje

Osnovne logičke operacije, vidi Tablicu 1.

Kvantifikatori:
$\forall$: čitaj »za svaki«
$\exists$: čitaj »postoji«
$\exists!$: čitaj »postoji samo jedan«

Ponekad se koristi oznaka »:« koja znači »takav da«. U istu svrhu se može koristiti oznaka »|«. Ponekad se obje ove oznake ispuštaju i potrebno je nakon kvantifikatora $\exists$ nadodati riječi »takav da.«

U sljedećim primjerima brod smatramo skupom čiji su elementi dijelovi broda. Oznaka $\in$ se čita »je element.«
Primjer. Izjava »($\forall$ brodski motor) ($\exists!$ brod) (brodski motor $\in$ brod)« tvrdi da »za svaki brodski motor postoji jedan točno određeni brod tako da je taj brodski motor dio tog jednog određenog broda.« Ako zanemarimo one brodske motore koji negdje leže neugrađeni u brodove ova tvrdnja mogla bi se smatrati istinitom.
Primjer. Izjava »($\exists$ brod) ($\forall$ brodski motor) (brodski motor $\in$ brod)« zasigurno je lažna jer tvrdi da postoji brod čiji je baš svaki brodski motor dio.

Oznaka za prazan skup: $\emptyset$
Operacije na skupovima: $X \cup Y$, $X \cap Y$ i $X \backslash Y$
Uspoređivanje skupova: $X = Y$ i $X \subseteq Y$
Skupovi se često označavaju ovako

$$S = \{x : \text{neka izjava za } x\}$$

što podrazumijeva da je S skup svih elemenata za koje je »neka izjava« istinita.
Primjer. $A = \{x : x > 2\}$

Uređaj $\leq$ na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Segment, interval, poluzatvoreni interval i oznake.

Priprema

Pročitati odlomke od 1.1.12 do 1.3.3 na stranama 3–13 iz knjige »Viša matematika«. Samostalno odgovoriti na pitanja:

(1) Da li je istina »pripremam se za nastavu i plešem«?
(2) Da li je istina »(pripremam se za nastavu i plešem) povlači (položiti ću matematiku)« bez obzira na istinitost izjave »položiti ću matematiku«?
(3) Zadani su skupovi:
$B_1 = \{\text{brod} : (\forall\, \text{brodski motor})(\text{brodski motor} \notin \text{brod})\}$,
$B_2 = \{\text{brod} : (\exists\, \text{jedro})\,(\text{jedro} \in \text{brod})\}$,
$B_3 = \{\text{brod} : (\exists!\, \text{jedro})\,(\text{jedro} \in \text{brod})\}$.
Koje od sljedećih izjava su istinite?

$$\begin{aligned} B_1 &= \emptyset \\ B_3 &\subseteq B_2 \\ B_3 &\subseteq B_1 \\ B_2 \cup B_3 &= B_2 \end{aligned}$$

Tablica valjanosti					
varijable		konjukcija	disjunkcija	implikacija	ekvivalencija
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Tablica 1. Osnovne logičke operacije na sudovima

Vježba Uređaj na skupu realnih brojeva

Donja međa skupa je broj koji je manji (ili jednak) od svakog člana skupa.
Gornja međa skupa je broj koji je veći (ili jednak) od svakog člana skupa.

Infimum je najveća donja međa.
Supremum je najmanja gornja međa.
Minimum je najmanji element skupa.
Maksimum je najveći element skupa.

Zadano je $a = 1$, $b = 2$. Za segment $[a, b]$ i interval $\langle a, b \rangle$ odrediti:

1. barem 3 donje međe,
2. barem 3 gornje međe,
3. infimum,
4. supremum,
5. minimum,
6. maksimum.

Vježba Funkcija morske dubine

Odrediti funkciju podrazumijeva poznavati:

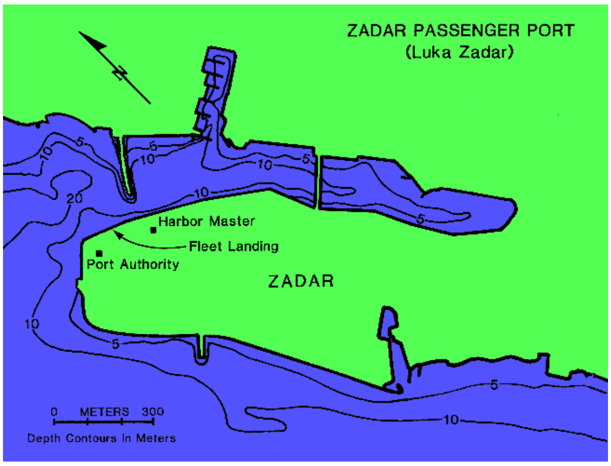
- *domenu* (gdje djeluje pravilo)
- *jednoznačno pravilo* (po kojem djeluje funkcija)
- *kodomenu* (vrijednosti funkcije)

Zadatak. Odrediti funkciju d morske dubine.

Odgovor.
Neka je λ zemljopisna dužina i φ zemljopisna širina. Vrijedi da je uređeni par $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ jedna točka na zemljinoj sferi. Sa $\mathcal{M}$ označimo sve točke (λ, φ) koje pokriva more. Tada je $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$. Složimo se da je na svakoj točki površine mora određena dubina (npr. bacanjem užeta s utegom ili preko »echo sounder-a«) i da je dobivena dubina u metrima realni broj. Dakle, skup $\mathcal{M}$ označava sva ona mjesta gdje možemo mjeriti dubinu mora. Stoga je $\mathcal{M}$ domena funkcije d i možemo pisati

$$d : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\,.$$

Definirajmo dalje pravilo za računanje funkcije: $d(\lambda, \varphi)$ = dubina mora na koordinatama (λ, φ).



Slika 0.0.1. Luka Zadar. Svaka točka na karti može se označiti sa dvije varijable: geografska širina i visina. Plavom bojom označena je morska površina na kojoj je definirana dubina mora.

Za kodomenu je uzet skup $\mathbb{R}$. Primjeti da se mogao uzeti i neki drugi skup: npr. skup samo pozitivnih realnih brojeva ili skup realnih brojeva između nula i 20 000. Važno je samo da sve vrijednosti izračunate danim pravilom budu u kodomeni.

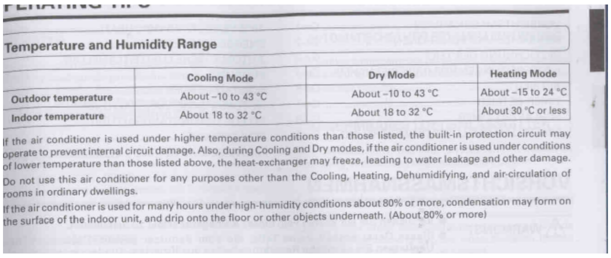
Ako želimo znati točno sve one vrijednosti koje može poprimiti funkcija tada je to pitanje odvojeno od definicije same funkcije. Skup svih vrijednosti koje funkcija može poprimiti naziva se *slika* funkcije. U mnogim slučajevima sliku funkcije je dosta teško precizno odrediti. U slučaju predmetne funkcije ako dopustimo izvjesnu nepreciznost mogli bi reći da je slika funkcije d skup $f[\mathcal{M}] = [0, 10\,911]$

Važno je zapamtiti! Ovako zadana funkcija dubine mora d garantira
1. pravilo za računanje vrijednosti funkcije d,
2. domenu — područje u kojem se može primijeniti dano pravilo računanja[1],
3. kodomenu — skup unutar kojeg će biti vrijednosti dubine mora.

[1] Ako bi se pokušala potražiti vrijednost pravila iz funkcije d van domene $\mathcal{M}$ vjerojatno bi uslijedio neuspjeh.

Vježba Klima uređaj

Odrediti područje primjene (domena) i rezultat djelovanja (slika funkcije). Deklaracija klima uređaja prikazana je na slici.



Temperature and Humidity Range

	Cooling Mode	Dry Mode	Heating Mode
Outdoor temperature	About –10 to 43 °C	About –10 to 43 °C	About –15 to 24 °C
Indoor temperature	About 18 to 32 °C	About 18 to 32 °C	About 30 °C or less

If the air conditioner is used under higher temperature conditions than those listed, the built-in protection circuit may operate to prevent internal circuit damage. Also, during Cooling and Dry modes, if the air conditioner is used under conditions of lower temperature than those listed above, the heat-exchanger may freeze, leading to water leakage and other damage.

Do not use this air conditioner for any purposes other than the Cooling, Heating, Dehumidifying, and air-circulation of rooms in ordinary dwellings.

If the air conditioner is used for many hours under high-humidity conditions about 80% or more, condensation may form on the surface of the indoor unit, and drip onto the floor or other objects underneath. (About 80% or more)

S obzirom na sadržaj deklaracije može se zaključiti da su u realnom svijetu važna pitanja područje primjene i rezultat djelovanja uređaja, a tek naknadno način kako upravljati uređajem (uputstvo za rad).

Vježba Implicitno zadana funkcija

Ponekad se funkcija zadaje samo pravilom (implicitno). Tada je na korisniku funkcije prije korištenja pravila provjeriti da razumije gdje se to pravilo može primjeniti kako ne bi uslijedila nekakva pogreška.

Zadatak. Da li je dobro zadana $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2x, & x \in [1,2] \end{cases}$ i zašto? Koja je domena funkcije f?

Vježba Osnovne operacije s brojevima

Shvatimo osnovne operacije s realnim brojevima kao implicitno zadane funkcije i odredimo im domenu.

$\text{dodavanje}_1(x) = x + 1 \qquad \mathcal{D}(\text{dodavanje}_1) =$

$\text{dodavanje}_c(x) = x + c \qquad \mathcal{D}(\text{dodavanje}_c) =$

$\text{zbrajanje}(x_1,\, x_2) = x_1 + x_2 \qquad \mathcal{D}(\text{zbrajanje}) =$

$\text{množenje}(x_1,\, x_2) = x_1 \cdot x_2 \qquad \mathcal{D}(\text{množenje}) =$

$\text{dijeljenje}(x_1,\, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2} \qquad \mathcal{D}(\text{dijeljenje}) =$

Vježba Kompozicija funkcije

Definicija 1.3.2 (knjiga str. 12) Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Pod kompozicijom funkcije f s funkcijom g podrazumijevamo funkciju $h : X \to Z$ zadanu pravilom $h(x) = g(\,f(x)\,)$ za svaki $x \in X$. Zapisujemo to kao $h = g \circ f$.

Zadatak. Zapisati sljedeće funkcije kao kompozicije osnovnih operacija s brojevima i odrediti domenu:

$$f_1(x) = \frac{x+5}{x^2-2}$$

$$f_2(x) = (-5) \cdot \frac{x+3}{(x+1)\,(x-2)}$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{x}$$

Graf funkcije

Graf funkcije f je skup $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$. $\mathcal{D}(f)$ je oznaka za domenu funkcije f. $(x, f(x))$ je uređeni par tako da je na prvoj koordinati parametar x, a na drugoj koordinati vrijednost $f(x)$.

Graf funkcije najčešće prikazujemo grafički. Na horizontalnoj osi (x) nanosimo vrijednosti parametra, a na vertikalnoj osi (y) vrijednosti funkcije. Vrijedi izreka: »slika vrijedi tisuću riječi.«

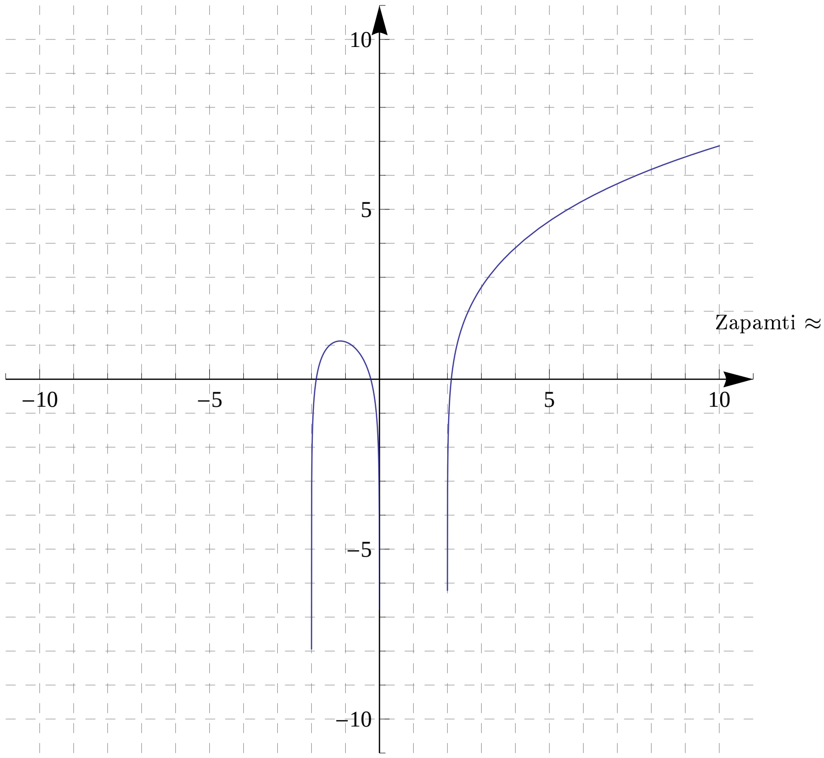
Zadatak. $f(x) = \ln\left(x^3 - 4x\right)$ ima graf desno

(1) sa grafa približno odrediti
$f(-1) \approx$ __
$f(5) \approx$ __

(2) računanjem odrediti
$f(-1) =$ __
$f(5) =$ __.

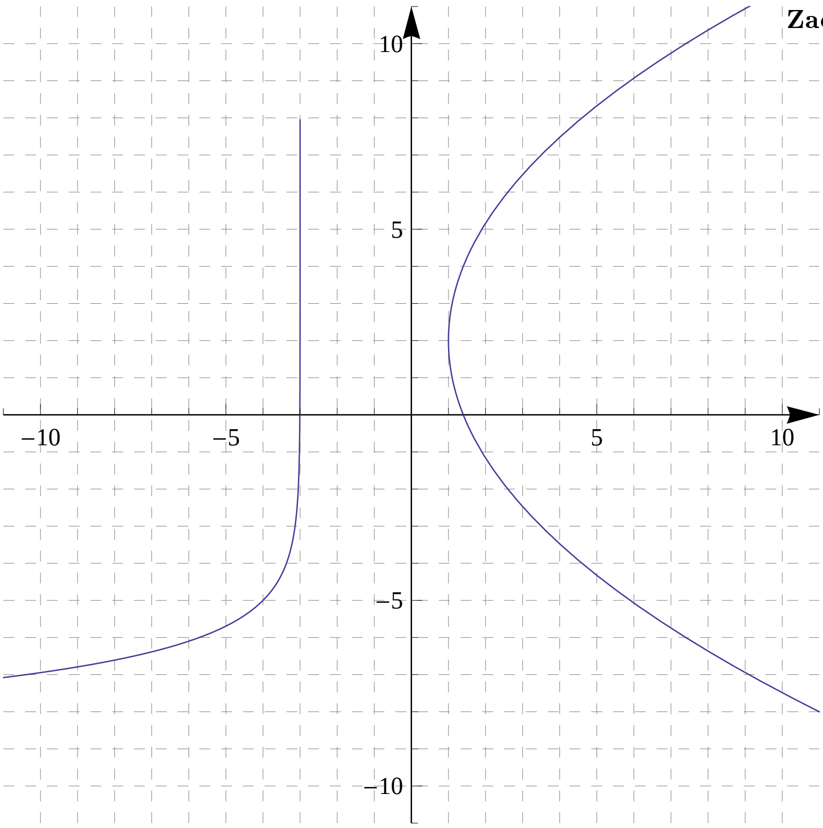
(3) sa grafa približno odrediti sve x za koje vrijedi $f(x) = -1$

(4) sa grafa približno odrediti domenu funkcije



Zapamtiti!

Sa grafa je moguće približno očitati vrijednosti funkcije.
x–koordinate sjecišta grafa funkcije sa horizontalnim pravcem na visini a određuju sva rješenja jednadžbe $f(x) = a$.
Domena od f odgovara samo onim vrijednostima na x–osi kroz koje vertikalni pravac siječe graf od f u točno jednoj točki.



Zadatak. Zadan je graf s lijeve strane.

(1) Zbog čega taj graf ne može biti određen nekom funkcijom?

(2) Na kojoj domeni bi neka funkcija mogla određivati barem dio grafa?

(3) Koji dio grafa bi mogli »odsjeći« tako da preostali dio grafa u cjelosti određuje neku funkciju?

(4) Da li postoji više rješenja na prethodno pitanje?

Inverzna funkcija

Definicija. Neka je zadana funkcija $f : X \to Y$. Inverzna funkcija od f je funkcija $g : Y \to X$ za koju vrijedi

$$f(\,g(x)\,) = x \qquad \text{i} \qquad g(\,f(x)\,) = x.$$

Može se pokazati da je inverzna funkcija, ako postoji, jedinstvena. Vidi teorem 1.3.1 u knjizi na str. 13.
Najčešća oznaka za inverznu funkciju od f je f^{-1}.

(korisno za algebarsko računanje)

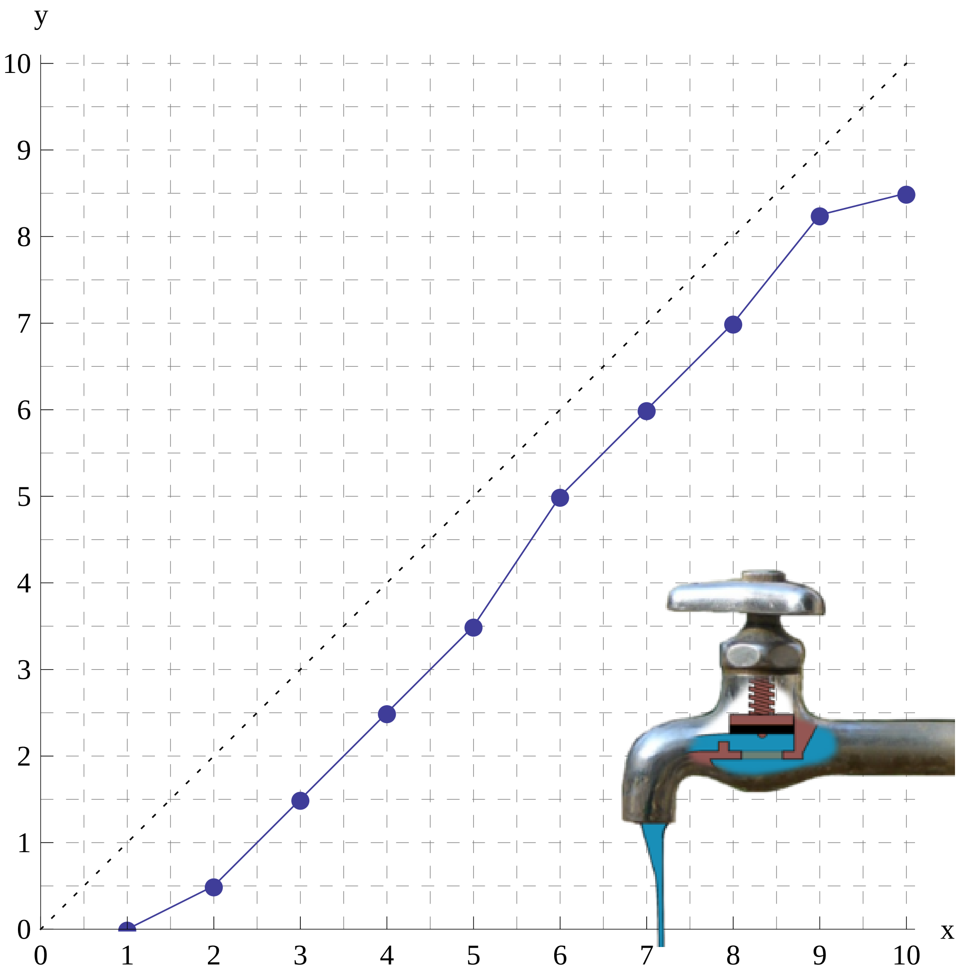
Uz oznaku za inverznu funkciju f^{-1} vrijedi

$$f(\,g(x)\,) = x \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{f(\,f^{-1}(x)\,) = x}.$$

(korisno kod crtanja grafa)

Ako rezultat funkcije f označimo sa $y = f(x)$ tada možemo pisati

$$g(\,f(x)\,) = x \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{f^{-1}(y) = x}.$$



Zamislimo da graf s lijeve strane prikazuje funkciju protoka kroz slavinu. Na x–osi nanesen je broj navrtaja pokretača slavine, a na y–osi je protok (npr. litara u minuti).

Zadatak. Odrediti graf inverzne funkcije. Kako interpretirati inverznu funkciju?

$\boxed{\text{Zapamti! Graf funkcije i njenog inverza simetrični su s obzirom na pravac } y = x.}$

Zadatak. Provjeri da tvrdnja vrijedi na grafu iz prethodnog zadatka.

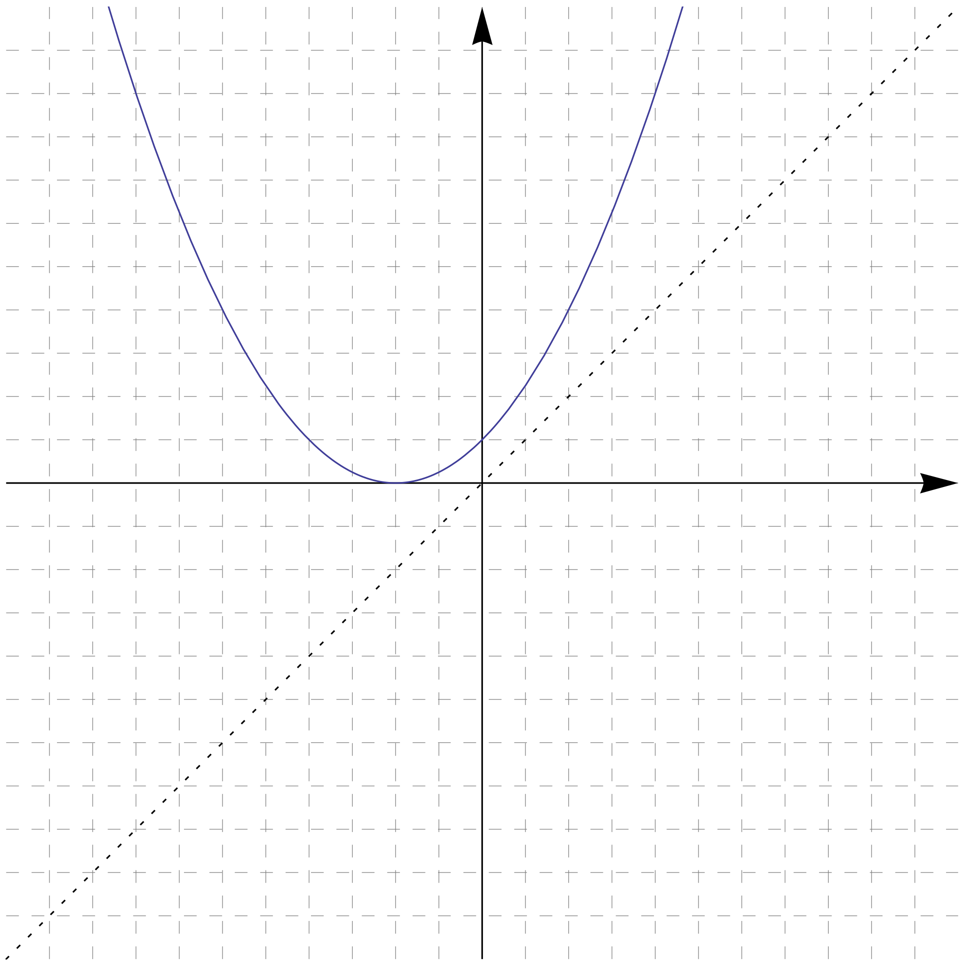
Problem inverza kvadratne funkcije

Primjer. Na slici je graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je zadana pravilom

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2.$$

1. Nacrtati krivulju koja je simetrična grafu funkcije f s obzirom na pravac $y = x$.

2. Zašto nacrtana krivulja nije graf funkcije?



(A) Graf funkcije f^{-1} treba odgovarati nacrtanoj krivulji.
(B) Nacrtana krivulja nije graf funkcije.
(Zaključak) Ne postoji f^{-1}, f nema inverz.

3. Modificirati nacrtanu krivulju tako da predstavlja graf neke funkcije koju ćemo zvati g_1. Odrediti domenu od g_1.

4. S obzirom na zrcalnu simetriju kojoj je os pravac $y = x$, kojem dijelu grafa od f je simetričan graf od g_1? Nazovimo f_1 funkciju kojoj je graf upravo simetričan na graf od g_1. Odrediti domenu od f_1.

5. Odrediti kodomene[2] od f_1 i g_1 tako da bude $f_1^{-1} = g_1$.

6. Na drugi način iz f odrediti f_2 koja će imati inverz g_2.

Definicije.
Surjekcija je funkcija kojoj je kodomena slika funkcije. Takva funkcija za prikladan odabir parametra poprima sve vrijednosti kodomene.
Injekcija je funkcija koja svaku vrijednost može poprimiti najviše jednom.
Bijekcija svaku vrijednost kodomene poprima točno jednom. Funkcija je bijekcija točno tada kada je ujedno surjekcija i injekcija.

Zadatak. Provjeti da f iz prethodnog primjera nije niti surjekcija niti injekcija.

Zadatak. Provjeri da su g_1 i f_1 bijekcije.

[2]Vidi definiciju inverzne funkcije: domena od f je kodomena od f^{-1} i domena od f^{-1} je kodomena od f.

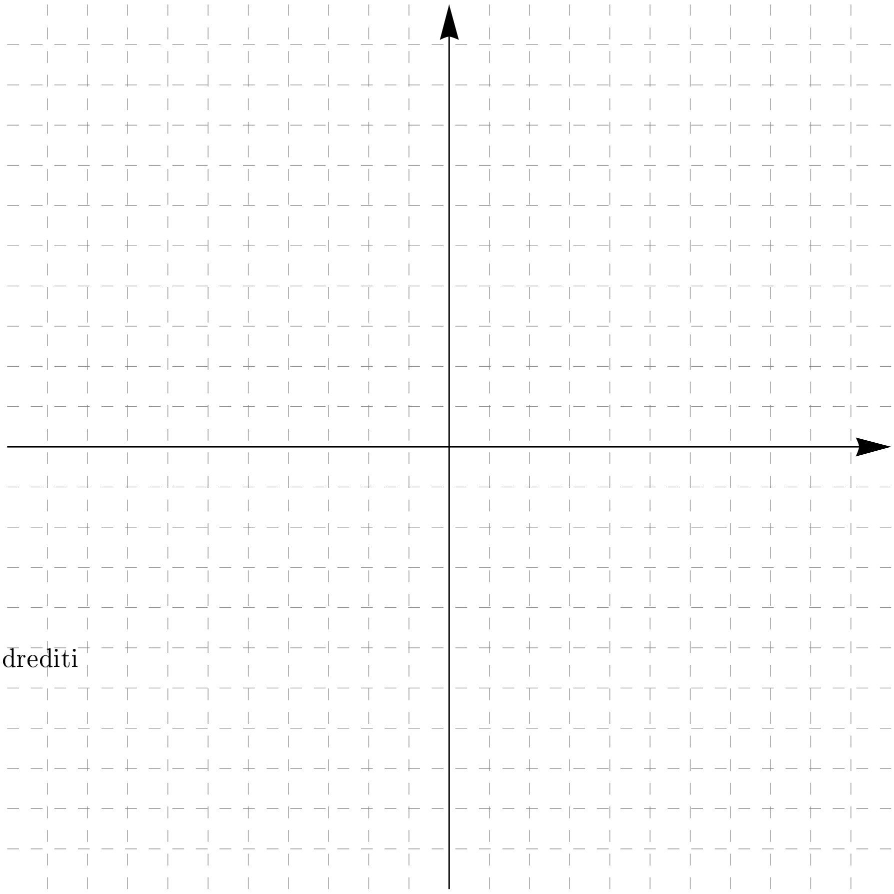
Zapamti!
Nema svaka funkcija inverz. Samo bijekcije imaju inverz.

Od funkcije koja nije bijekcija može se restrikcijom domene i kodomene dobiti bijekcija.

Algebarsko traženje inverza

Primjer. Zadano je $f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$. Nacrtati graf[3]. Odrediti domenu i sliku funkcije.

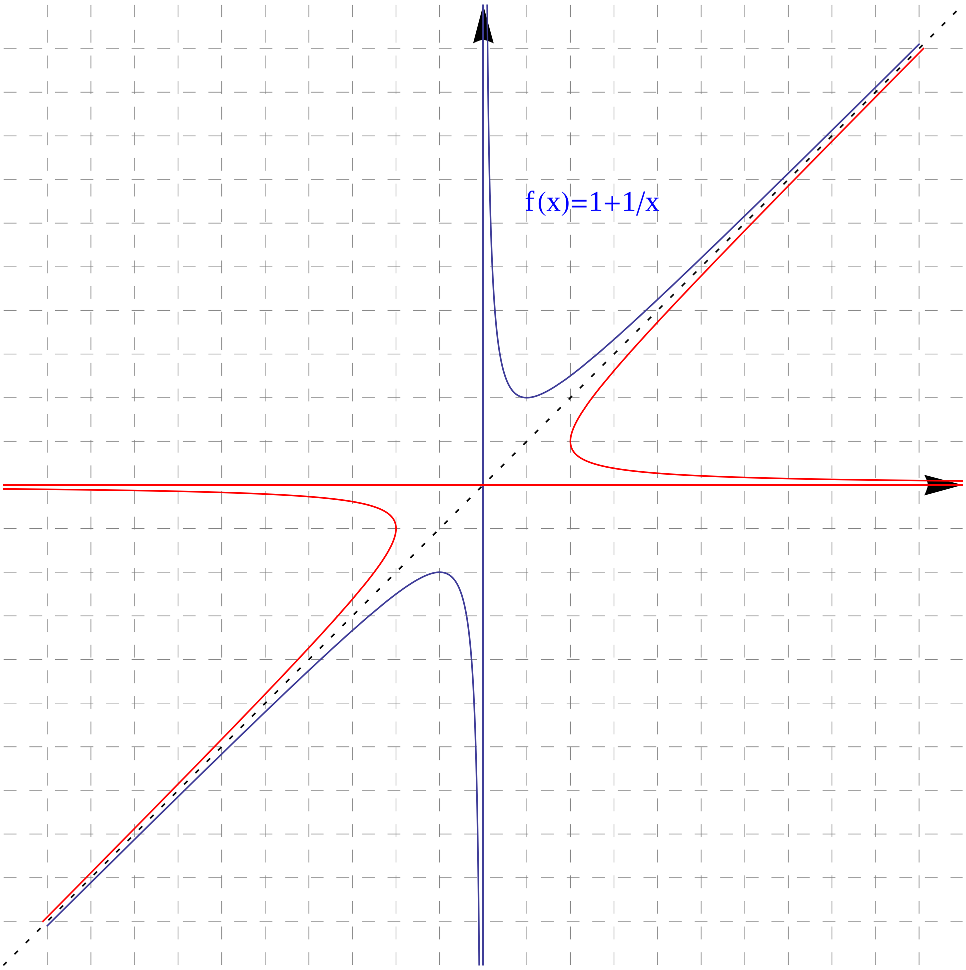
Da li je funkcija bijekcija? Zašto?



Koristeći jednakost $\boxed{f(\,f^{-1}(x)\,) = x}$ odrediti algebarski izraz za f^{-1} i nacrtati graf.

Provjeriti da vrijedi $f(\,f^{-1}(x)\,) = x$ i $f^{-1}(\,f(x)\,) = x$.

[3]Funkcije oblika $f(x) = a\,x + b$ gdje su a i b zadane konstante nazivaju se *afinim funkcijama*. Graf takvih funkcija je pravac. Svaki pravac određen je sa svoje dvije točke.



Slika 0.0.2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (plavo) i simetrija grafa prema pravcu $y = x$ (crveno).

Zadatak. Algebarski odrediti inverz funkcije $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Usporediti rezultat s grafom desno. Da li je f surjekcija, injekcija? Kako preinačiti f da ima inverz?

Nakon seminara preporuka je pročitati tekst internet enciklopedije `http://en.wikipedia.org/wiki/Function_(mathematics)` (od početka do »Functions with multiple inputs and outputs« i od »Injective and surjective functions« do »Inverse image«).