

## Seminar 3

### Potrebno predznanje

Osnovno enciklopedijsko znanje o funkcijama (vidi dodatak 1)

Zadavanje funkcija implicitno i grafički.

Omeđena funkcija. Parnost i neparnost. Monotona, padajuća i rastuća funkcija. Periodična funkcija. Osnovne elementarne funkcije, osnovna svojstva i grafovi. (vidi odlomke od 3.1.1 do 3.1.3 na stranama 101–111 iz knjige »Viša matematika«).

Korisničko poznavanje nekog alata za crtanje grafa funkcije (vidi NetPlot na <http://lavica.fesb.hr/netplot/index.html> gdje je priložena i kratka korisnička dokumentacija).

### Priprema

Proučiti gore spomenute materijale.

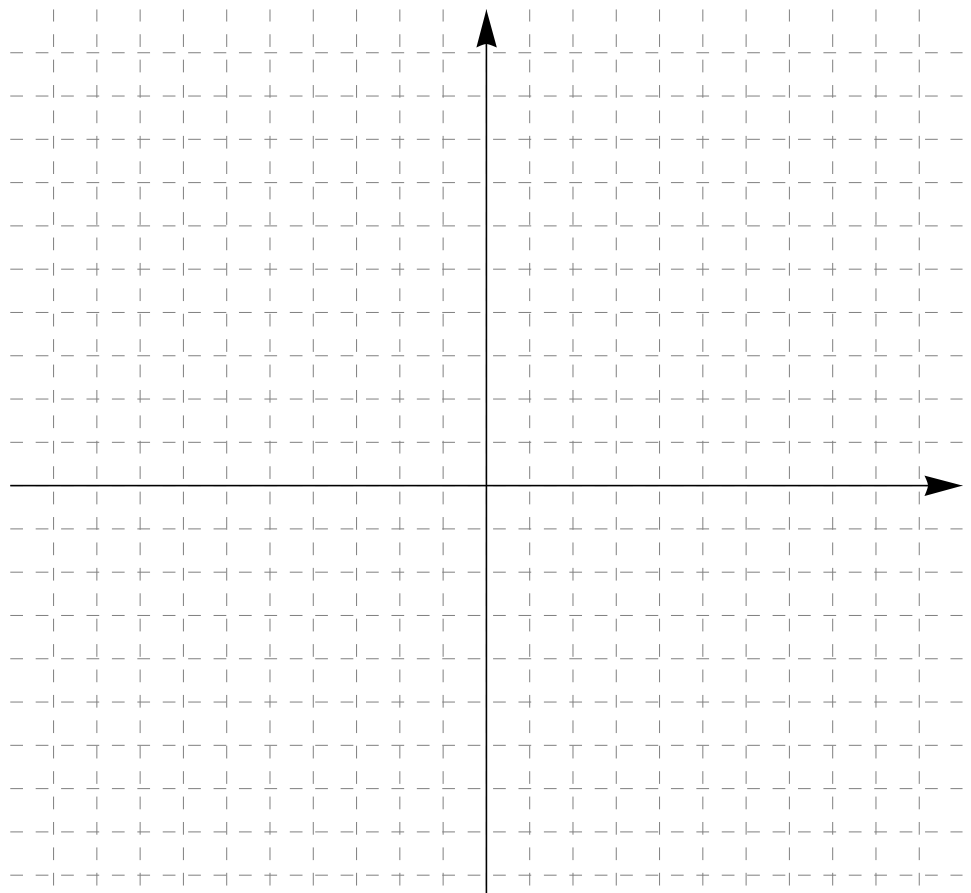
Upoznati se sa NetPlot ili nekim drugim alatom za crtanje grafa funkcije.

Samostalno, za svaku funkciju navedenu na ovoj i sljedeće četiri stranice:

- (1) napisati domenu funkcije
- (2) ispuniti tablicu kalkulatorom izračunavši vrijednosti u traženim točkama,
- (3) u koordinatni sustav ucrtati sve točke iz tablice,
- (4) iscrtati graf funkcije na računalu koristeći alat za crtanje grafa funkcije (predloženi alat ili neki drugi),
- (5) po uzoru na računalno iscrtani graf funkcije koliko je moguće bolje iscrtati graf funkcije u priloženom koordinatnom sustavu pazeći da linija prolazi kroz točke iz drugog koraka,
- (6) provjetiti graf iste funkcije u knjizi »Viša matematika.«

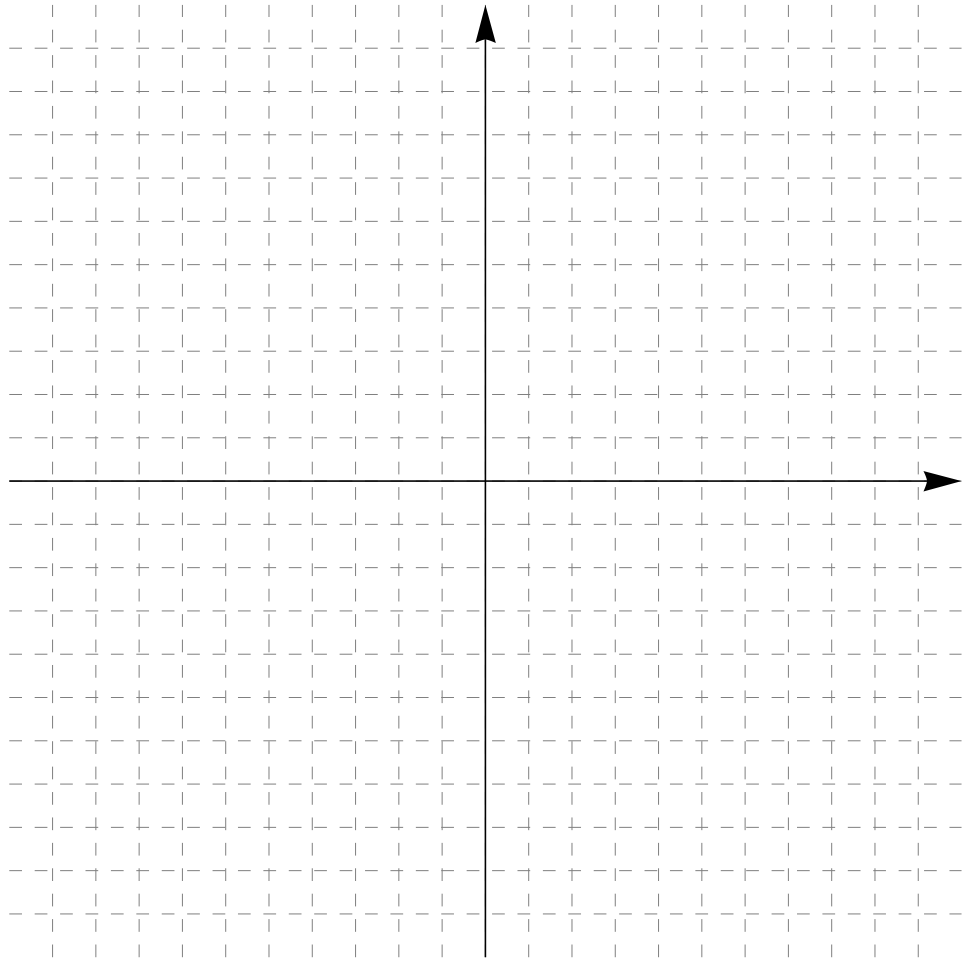
Slijede funkcije kojih je računanje i crtanje dio pripreme za seminar. Priprema treba biti napravljena prije početka seminara. Na seminar treba doći sa ovim seminarskim materijalom na kojem je napravljena priprema.

| $f_1(x) = x^2$       | $f_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$ |          |
|----------------------|----------------------------|----------|
| $\mathcal{D}(f_1) =$ |                            |          |
| $\mathcal{D}(f_2) =$ |                            |          |
| $x$                  | $f_1(x)$                   | $f_2(x)$ |
| $-\pi$               |                            |          |
| $-2$                 |                            |          |
| $-0.5$               |                            |          |
| $0$                  |                            |          |
| $0.5$                |                            |          |
| $2$                  |                            |          |
| $\pi$                |                            |          |

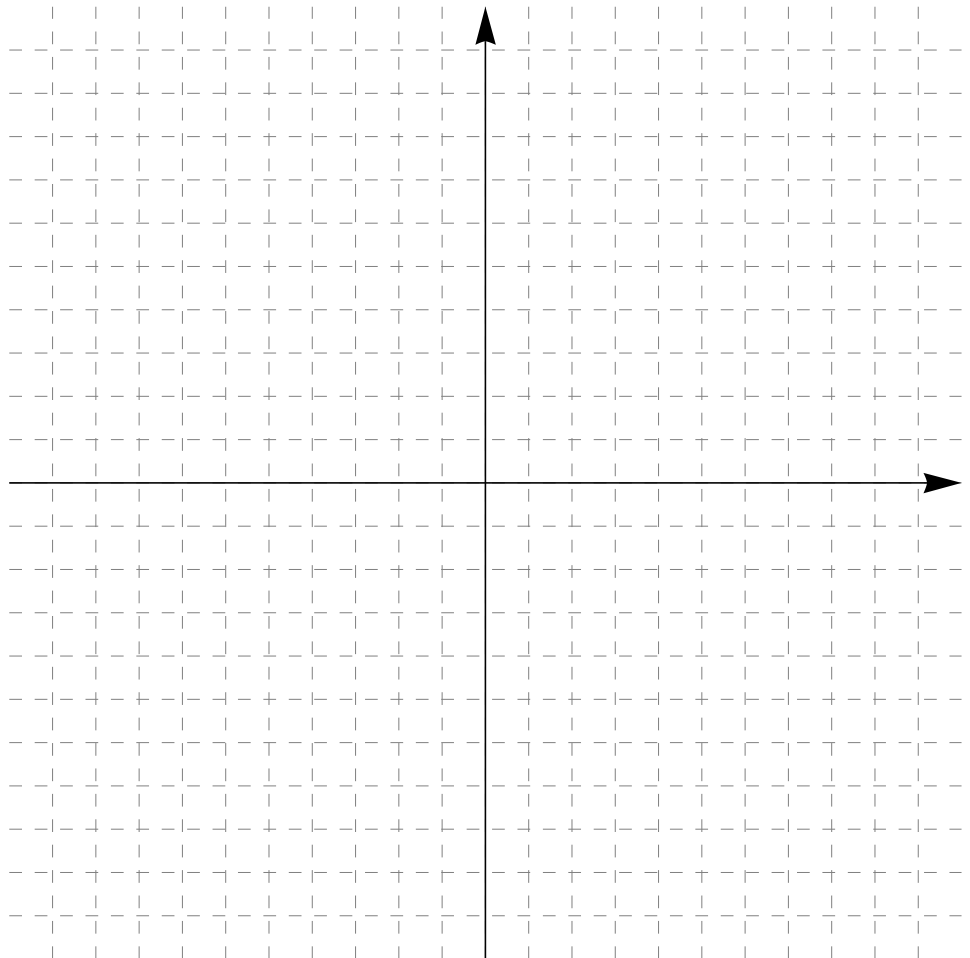


## Seminar #3

| $f_3(x) = x^3$       | $f_4(x) = x^{\frac{1}{3}}$ |          |
|----------------------|----------------------------|----------|
| $\mathcal{D}(f_3) =$ |                            |          |
| $\mathcal{D}(f_4) =$ |                            |          |
| $x$                  | $f_3(x)$                   | $f_4(x)$ |
| -2                   |                            |          |
| -1                   |                            |          |
| -0.5                 |                            |          |
| 0                    |                            |          |
| 0.5                  |                            |          |
| 1                    |                            |          |
| 2                    |                            |          |

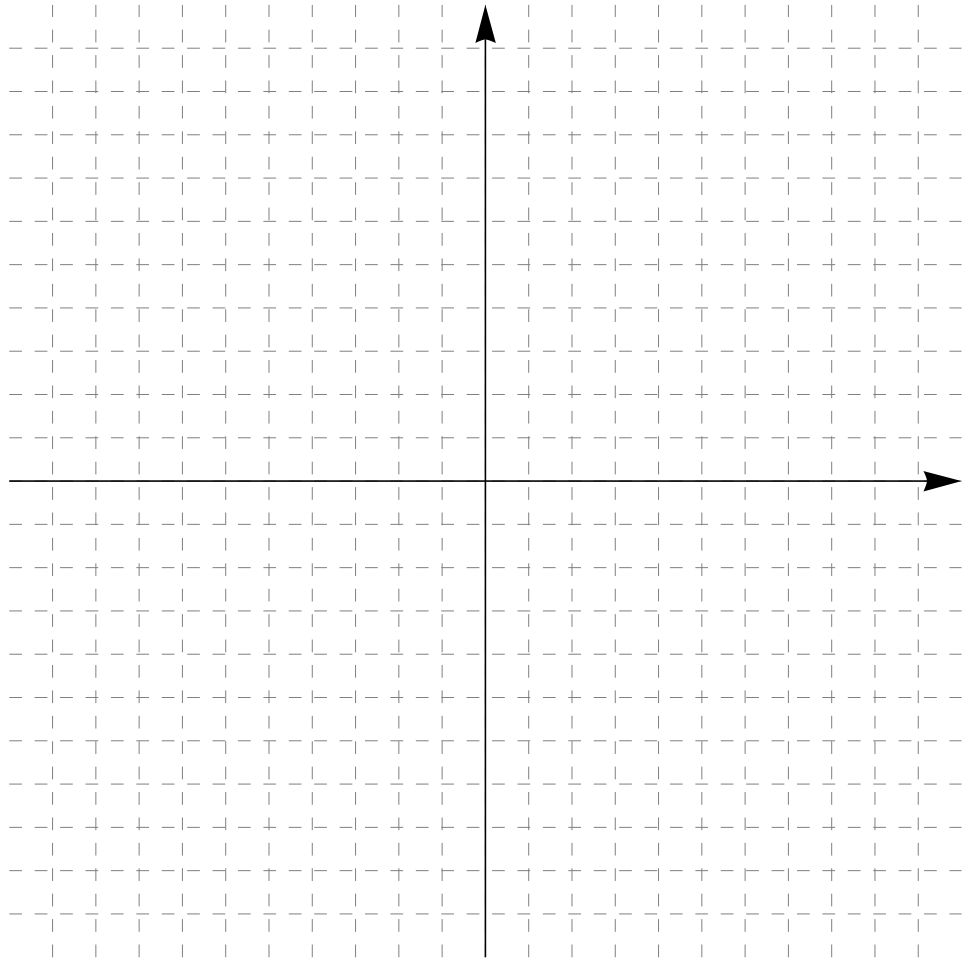


| $f_5(x) = x^{\frac{2}{3}}$ | $f_6(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ |          |
|----------------------------|-----------------------------|----------|
| $\mathcal{D}(f_5) =$       |                             |          |
| $\mathcal{D}(f_6) =$       |                             |          |
| $x$                        | $f_5(x)$                    | $f_6(x)$ |
| $-\pi$                     |                             |          |
| -2                         |                             |          |
| -0.5                       |                             |          |
| 0                          |                             |          |
| 0.5                        |                             |          |
| 2                          |                             |          |
| $\pi$                      |                             |          |

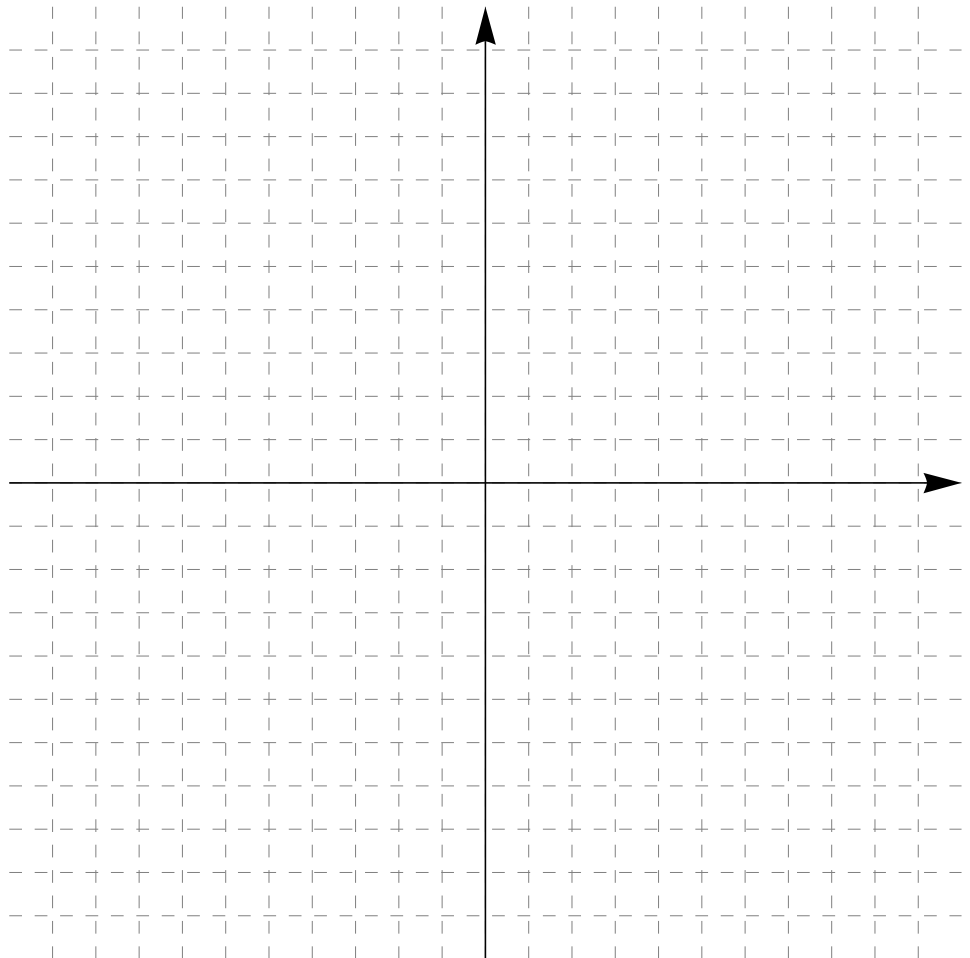


## Seminar #3

| $f_7(x) = e^x$       | $f_8(x) = \ln x$ |          |
|----------------------|------------------|----------|
| $\mathcal{D}(f_7) =$ |                  |          |
| $\mathcal{D}(f_8) =$ |                  |          |
| $x$                  | $f_7(x)$         | $f_8(x)$ |
| -2                   |                  |          |
| -1                   |                  |          |
| 0                    |                  |          |
| 0.5                  |                  |          |
| 1                    |                  |          |
| 1.5                  |                  |          |
| 2                    |                  |          |

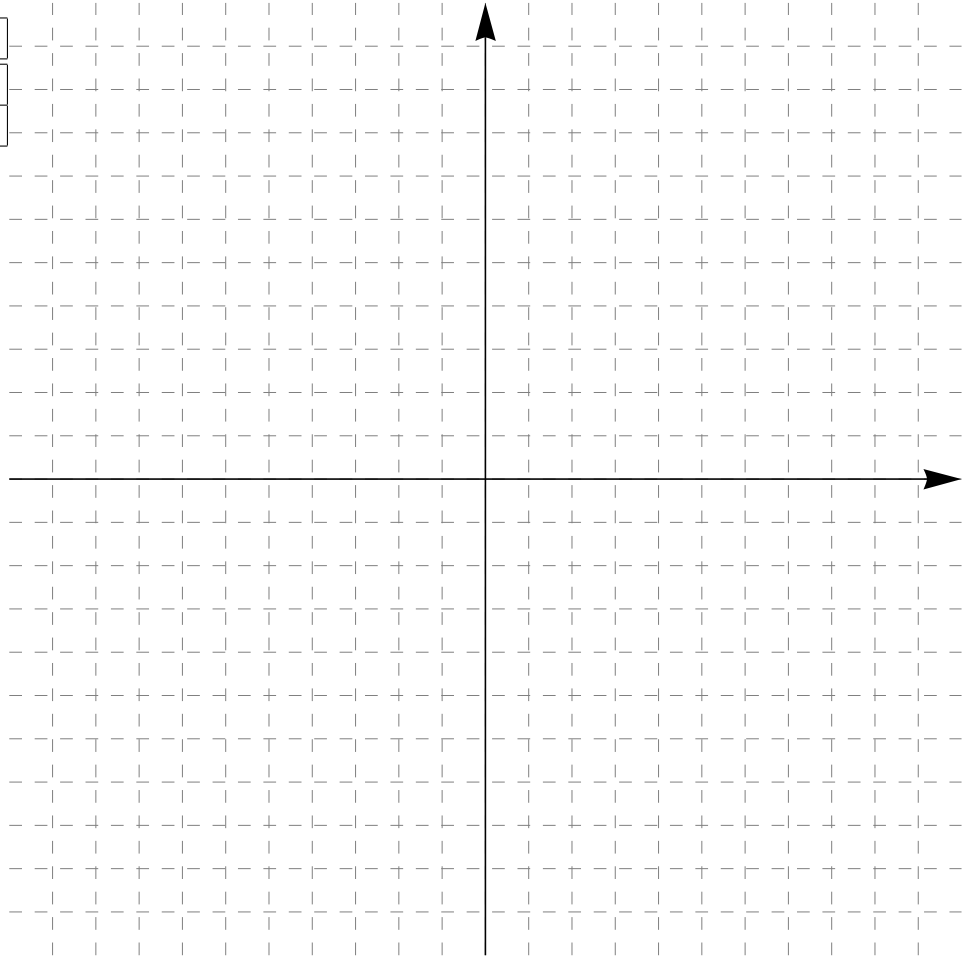


| $f_9(x) = 2^x$          | $f_{10}(x) = \log_2 x$ |             |
|-------------------------|------------------------|-------------|
| $\mathcal{D}(f_9) =$    |                        |             |
| $\mathcal{D}(f_{10}) =$ |                        |             |
| $x$                     | $f_9(x)$               | $f_{10}(x)$ |
| -1                      |                        |             |
| 0                       |                        |             |
| 0.5                     |                        |             |
| 1                       |                        |             |
| 1.5                     |                        |             |
| 2                       |                        |             |
| $\pi$                   |                        |             |

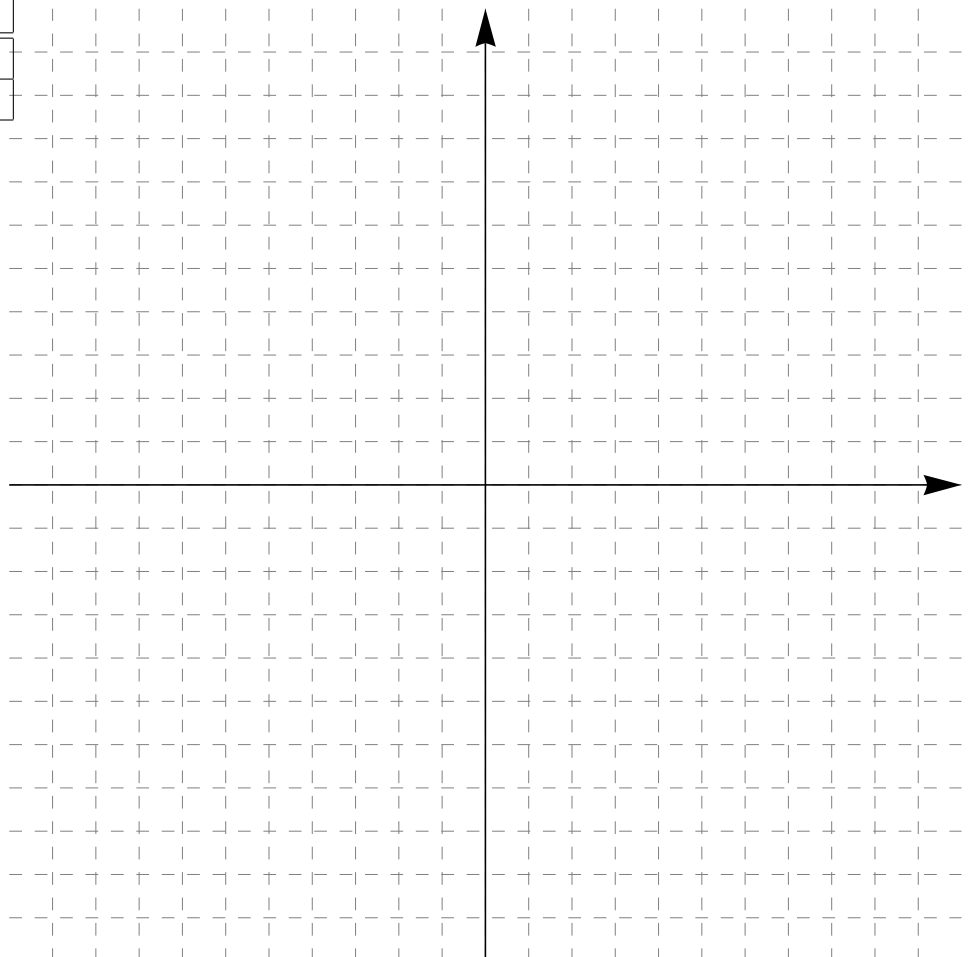


## Seminar #3

|                         |                         |             |
|-------------------------|-------------------------|-------------|
| $f_{11}(x) = \sin x$    | $f_{12}(x) = \arcsin x$ |             |
| $\mathcal{D}(f_{11}) =$ |                         |             |
| $\mathcal{D}(f_{12}) =$ |                         |             |
| $x$                     | $f_{11}(x)$             | $f_{12}(x)$ |
| -2                      |                         |             |
| -1                      |                         |             |
| 0                       |                         |             |
| $\frac{\pi}{4}$         |                         |             |
| 1                       |                         |             |
| $\frac{\pi}{2}$         |                         |             |
| $\pi$                   |                         |             |



|                         |                         |             |
|-------------------------|-------------------------|-------------|
| $f_{13}(x) = \cos x$    | $f_{14}(x) = \arccos x$ |             |
| $\mathcal{D}(f_{13}) =$ |                         |             |
| $\mathcal{D}(f_{14}) =$ |                         |             |
| $x$                     | $f_{13}(x)$             | $f_{14}(x)$ |
| -2                      |                         |             |
| -1                      |                         |             |
| 0                       |                         |             |
| $\frac{\pi}{4}$         |                         |             |
| 1                       |                         |             |
| $\frac{\pi}{2}$         |                         |             |
| $\pi$                   |                         |             |



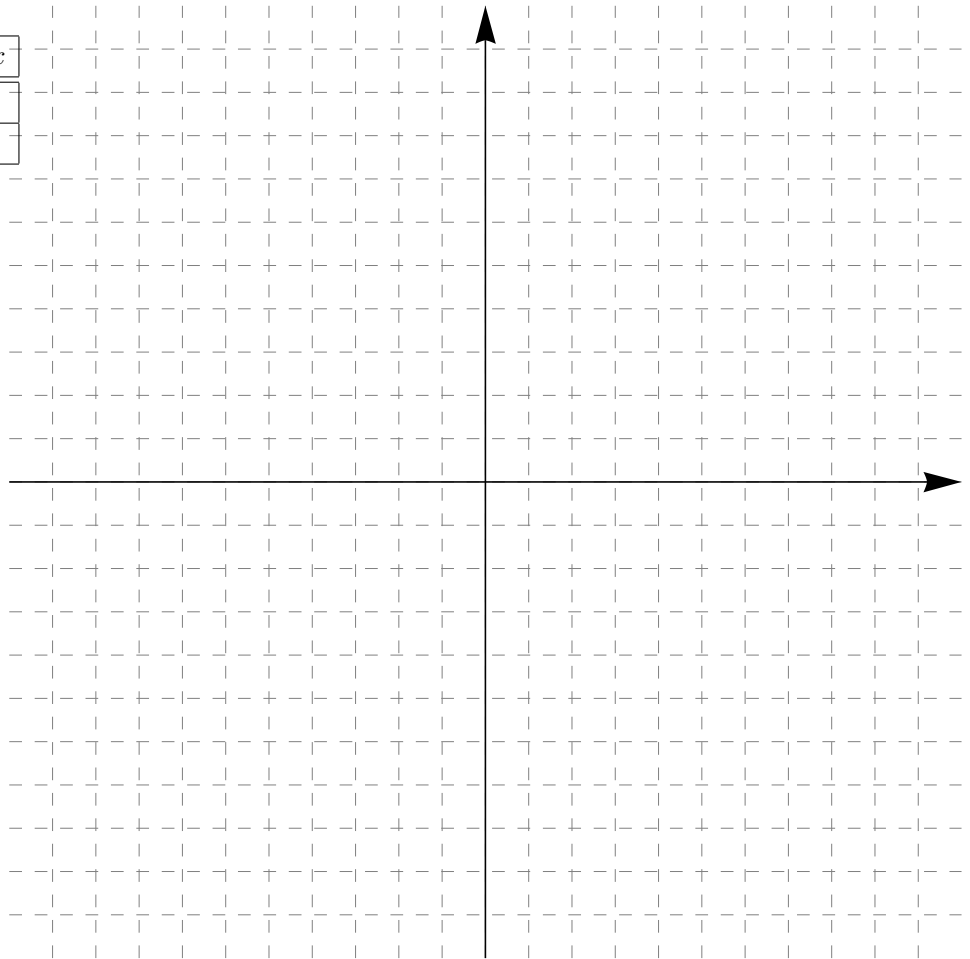
## Seminar #3

|                      |                         |
|----------------------|-------------------------|
| $f_{15}(x) = \tan x$ | $f_{16}(x) = \arctan x$ |
|----------------------|-------------------------|

|                         |
|-------------------------|
| $\mathcal{D}(f_{15}) =$ |
|-------------------------|

|                         |
|-------------------------|
| $\mathcal{D}(f_{16}) =$ |
|-------------------------|

| $x$             | $f_{15}(x)$ | $f_{16}(x)$ |
|-----------------|-------------|-------------|
| -3              |             |             |
| -2              |             |             |
| -1              |             |             |
| 0               |             |             |
| 1               |             |             |
| $\frac{\pi}{2}$ |             |             |
| 2               |             |             |
| 3               |             |             |

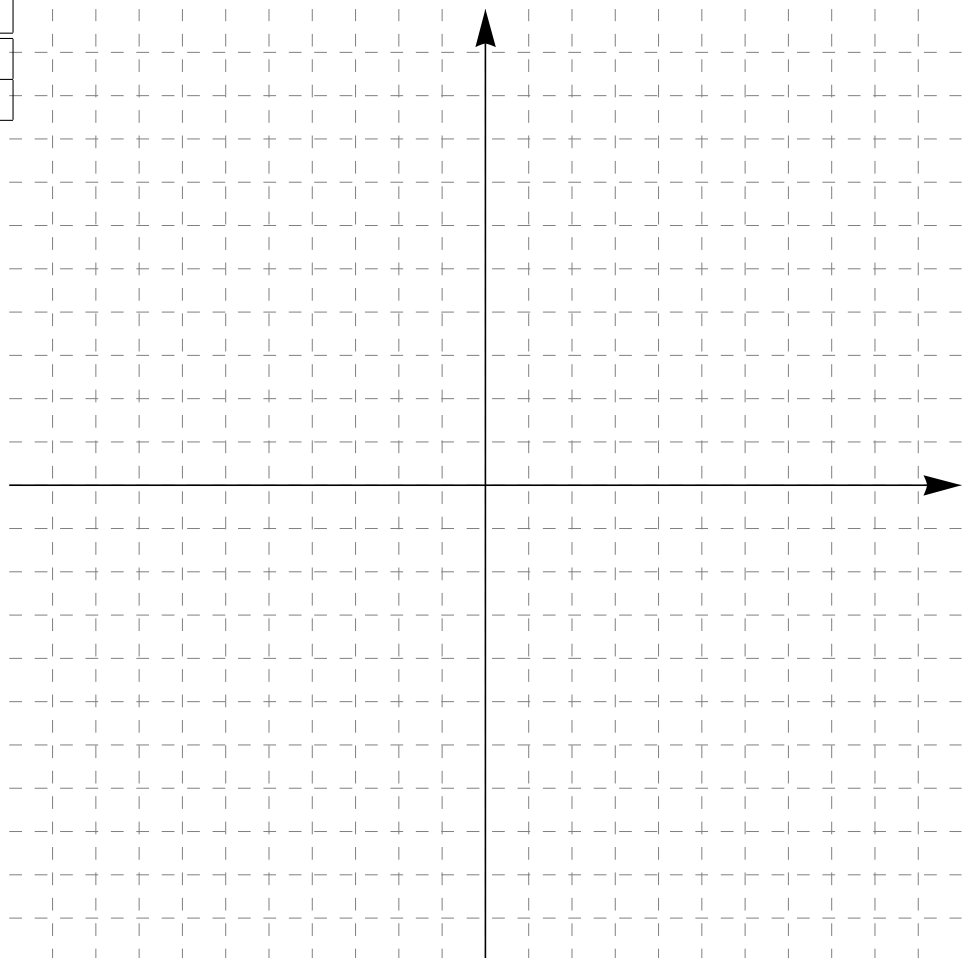


|                      |                                       |
|----------------------|---------------------------------------|
| $f_{17}(x) = \cot x$ | $f_{18}(x) = \operatorname{arccot} x$ |
|----------------------|---------------------------------------|

|                         |
|-------------------------|
| $\mathcal{D}(f_{17}) =$ |
|-------------------------|

|                         |
|-------------------------|
| $\mathcal{D}(f_{18}) =$ |
|-------------------------|

| $x$             | $f_{17}(x)$ | $f_{18}(x)$ |
|-----------------|-------------|-------------|
| -3              |             |             |
| -2              |             |             |
| -1              |             |             |
| 0               |             |             |
| 1               |             |             |
| $\frac{\pi}{2}$ |             |             |
| 2               |             |             |
| 3               |             |             |



Time završavaju funkcije na kojima treba napraviti pripremu za seminar.

**Inverzi nekih osnovnih elementarnih funkcija**

**Zadatak.** Odrediti inverze ranije navedenih osnovnih elementarnih funkcija.

## Omeđenost funkcije

### Definicije.

Gornja međa funkcije je broj koji je gornja međa slike funkcije.<sup>1</sup>

Donja međa funkcije ... .. donja međa slike. . .

Supremum funkcije ... .. supremum slike. . .

Infimum funkcije ... .. infimum slike. . .

Funkcija je omeđena ako je omeđena slika funkcije.

**Zadatak.** Ispitati omeđenost ranije navedenih funkcija.

### Parnost i neparnost

Koji je uvjet da funkciju  $f$  nazivamo parnom?

Graf parne funkcije je zrcalno simetričan s obzirom na  $y$ -os. To znači da je lijeva poluravnina kao zrcalni odraz desne poluravnine.

Koji je uvjet da funkciju  $f$  nazivamo neparnom?

Graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište. To znači da za svaku točku grafa  $T_1$  postoji druga točka grafa  $T_2$  takva da je ishodište na polovištu dužine  $\overline{T_1T_2}$ .

### Zadatak.

Ispitati parnost i neparnost ranije navedenih funkcija.

### Monotonost funkcija

Funkcija raste na skupu  $X$  ako za svaki  $x_1 \in X$  i  $x_2 \in X$  takvi da je  $x_1 \leq x_2$  vrijedi  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Funkcija koja raste na cijeloj domeni naziva se rastućom.

Slično za padajuću funkciju. Ako je funkcija rastuća na cijelom skupu  $X$  ili padajuća na cijelom skupu  $X$  kažemo da je  $X$  monotona na cijelom skupu  $X$ .

### Zadatak.

Od ranije navedenih funkcija koje su rastuće, a koje padajuće?

### Periodičnost

Vidi definiciju 3.1.4 iz knjige. Funkcija je periodična ako postoji broj  $P > 0$  (koji se naziva period) takav da vrijedi oboje:

- (1) ako je  $x \in \mathcal{D}(f)$  tada je  $x \pm P \in \mathcal{D}(f)$
- (2) ako je  $x \in \mathcal{D}(f)$  tada je  $f(x) = f(x \pm P)$

Lako se vidi da ako je  $P$  period da je tada svaki pozitivan višekratnik od  $P$  opet period. Najmanji period se naziva osnovni period.

### Zadatak.

Od ranije navedenih funkcija koje su periodične?

**Preporučena literatura.** Korisno je znati na koji način su neke jednostavne transformacije grafa funkcije  $f$  (npr. translacija) povezane s izrazom kojim se zadaje funkcija (npr.  $f(x + c)$ ). O tome govori odatak 2.

<sup>1</sup>Slika funkcije je skup svih vrijednosti koje poprima funkcija. Slika funkcije je uvijek podskup kodomene. Slika se označava sa  $\mathcal{Im}(f)$   
 $\mathcal{Im}(f) = \{f(x) : x \in \mathcal{D}(f)\}$ .