

Seminar 5

$\mathbf{A} =$

$\mathbf{B} =$

Potrebno predznanje

Ne zaboravite nositi kalkulator. Iako se vrijednosti sinusa i kosinusa lagano dobiju korištenjem kalkulatora, korisno je znati neke vrijednosti ove dvije funkcije za kuteve koji se najčešće javljaju u zadacima i primjeni. Preporuka je da napamet naučite sljedeću tablicu.

(2) Izračunati:

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = \sqrt{0}/2 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$2\mathbf{A} =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = \sqrt{1}/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = \sqrt{4}/2 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

$\mathbf{A} - \mathbf{B} =$

Matrica i označavanje matrice. Osnovni pojmovi vezani uz matricu: matrični element, redak i stupac matrice, tip matrice, kvadratna matrica n -tog reda, glavna dijagonala matrice, jedinična matrica, nulmatrica, ulančane matrice. Osnovne operacije na matricama: zbrajanje, oduzimanje, množenje skalarom i množenje dviju matrica. Determinanta i označavanje determinante.

$\mathbf{A}\mathbf{B} =$

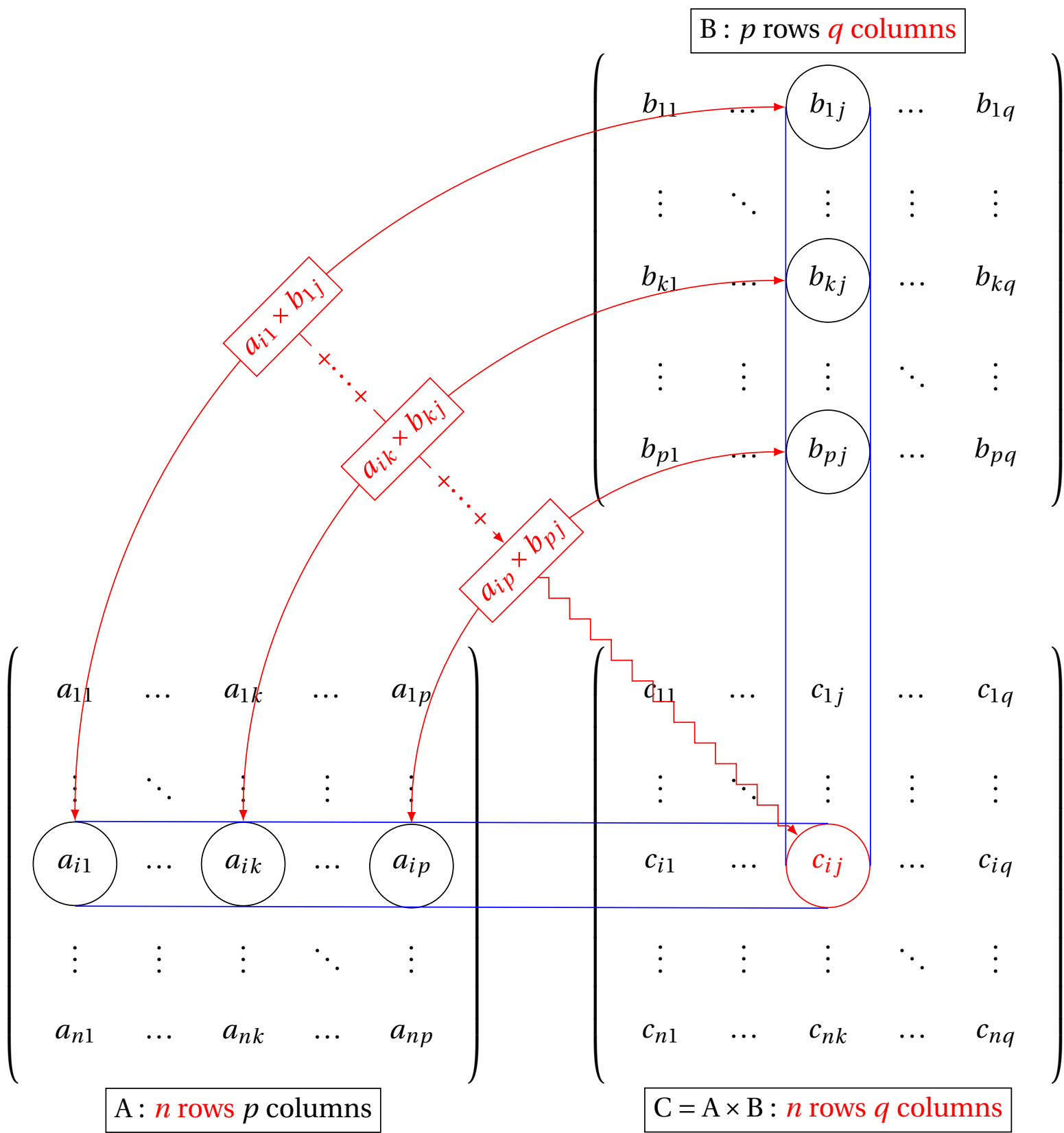
Priprema

Pročitajte str. 49-53 u knjizi ili unos o matricama na Wikipediji ([http://hr.wikipedia.org/wiki/Matrica_\(matematika\)](http://hr.wikipedia.org/wiki/Matrica_(matematika))). Obratite pažnju na pojmove navedene kao potrebno predznanje o matricama. U svladavanju matričnog množenja može vam pomoći video prikaz postavljen na moodle stranice kolegija (<https://moodle.carnet.hr/mod/resource/view.php?id=46812>) i skica na sljedećoj stranici.

Svaki student treba na seminar doći s **vlastitim jedinstvenim primjerima:**

- (1) Zapisati dvije kvadratne matrice reda 3. Nazovite ih \mathbf{A} i \mathbf{B} .

$\mathbf{B}\mathbf{A} =$



Glavni dio seminara

Jedinična matrica je kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a na ostalim mjestima nule. Označava se slovom **I**. Kvadratna matrica **A** ima inverz kvadratnu matricu **B** istog reda ako vrijedi

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{i} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Primjer (1). Provjeri da su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2 & -0.5 \\ -0.15 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$ inverzne.

Primjer (2). Provjeri da se sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}x + 2y - z + u &= -1 \\2x + 5y - z + 2u &= -2 \\3x - y - 2z + u &= 5 \\x - y + 3z - 5u &= 6\end{aligned}$$

može zapisati množenjem matrica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{B}}$$

Matrica **A** naziva se matrica sustava, **X** matrica (vektor) nepoznanica, a **B** matrica (vektor) slobodnih članova (ili desna strana).

Provjeri da $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ riješava dani sustav. Koje je rješenje za nepoznanice x, y, z i u ?

Nema svaki sustav linearnih jednadžbi rješenje, a ponekad može imati i beskonačno rješenja. Linearni sustav koji uvijek ima točno jedno rješenje karakteriziran je regularnom matricom sustava.

Determinanta je funkcija koja svakoj kvadratnoj matrici pridružuje broj (kojeg nazivamo **determinanta matrice**).

Primjer (3). Za determinantu matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pišemo $\det \mathbf{A}$ ili

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinantu možemo računati razvojem po prvom stupcu:

(1): kvadratnu matricu prvog reda $\det(a) = |a| = a$.

Zadatak 1. Izračunati $\det(3) =$

(2): kvadratnu matricu drugog reda

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Zadatak 2. Izračunati $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

(3): kvadratnu matricu trećeg reda

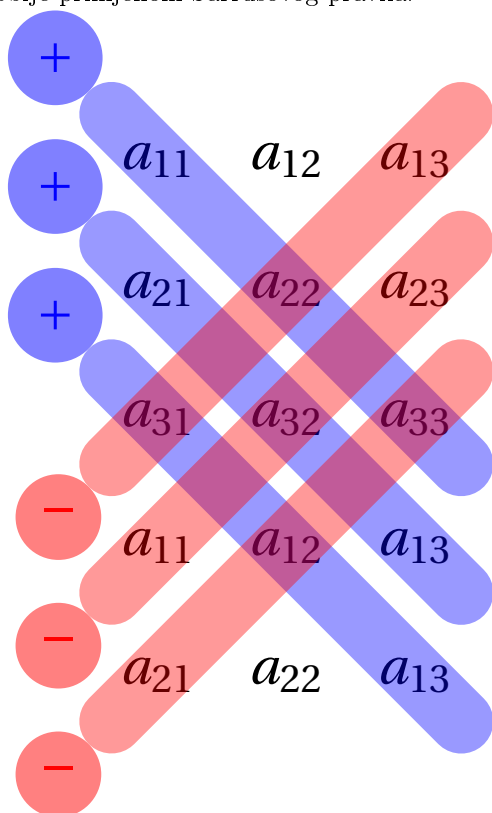
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Zadatak 3. Izračunati $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

Računanje determinante matrice reda tri može se mnemotehnički pamtili prema tzv. Sarrusovom pravilu koje je dano shemom ispod.

Zadatak 4. Provjeri da se isti rezultat iz prethodnog zadatka

dobije primjenom Sarrusovog pravila.



Važno! Determinatnu podmatricu koja se iz matrice \mathbf{A} dobije ispuštanjem i -tog retka i j -tog stupca označujemo D_{ij} . Broj $(-1)^{i+j} D_{ij}$ označavamo sa A_{ij} i nazivamo algebarski komplement elementa a_{ij} matrice \mathbf{A} .

(n): Za kvadratnu matricu n -tog reda vrijedi

$$\det A = a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1} D_{11}}_{=A_{11}} + a_{21} \underbrace{(-1)^{2+1} D_{21}}_{=A_{21}} + \dots + a_{n1} \underbrace{(-1)^{n+1} D_{n1}}_{=A_{n1}}$$

Zadatak 5. Izračunati

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

U definiciji determinante za opću matricu n -tog reda može se fiksirati bilo koji stupac ili redak, nije bilo potrebno uzeti baš prvi stupac. Za razvoj po k -tom stupcu vrijedi sljedeća formula (za razvoj po retku slično):

$$\det A = a_{1k} \underbrace{(-1)^{1+k} D_{1k}}_{=A_{1k}} + a_{2k} \underbrace{(-1)^{2+k} D_{2k}}_{=A_{2k}} + \dots + a_{nk} \underbrace{(-1)^{n+k} D_{nk}}_{=A_{nk}}$$

Zadatak 6. Razvojem po četvrtom retku izračunajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

U pravilu za računanje determinante biramo razvoj po onom retku ili stupcu koji ima najviše nula.

Regularne matrice imaju determinatnu različitu od nule, a singularne matrice determinantu jednaku nula. **Važno!**

Zadatak 7. Računanjem determinante provjeri jesu li sljedeće matrice regularne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2 & -0.5 \\ -0.15 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$