Seminar 6

Napomena. Posljednja stranica seminarskih materijala za seminar 5 je ažurirana i pridodana kao posljednja stranica materijala za ovaj seminar.

Potrebno predznanje

Studenti trebaju biti upoznati s elementarnim transformacijama na matrici.

Priprema

Pročitajte tekst iz dodatka 4 (Baranović, Jerković, Vježbe iz matematike 1, skripta, str. 45-47). Savladajte primjere iz zadatka 7 i 10 u dodatku 4.

NA ZNANJE STUDENTIMA! Već je obrađen veći dio gradiva koji će biti uključen u prvi kolokvij. Provjere znanja koje su uvjet za izlazak na kolokvij zahtjevaju dosta vremena i truda. Studenti koji još nisu započeli sa riješavanjem ovih provjera možda zbog pomanjkanja vremena neće biti u mogućnosti riješiti provjere i ispuniti uvjet za izlazak na kolokvij. Nadalje, seminarski materijali biti će dostupni samo preko Moodle mrežnog mjesta ovog kolegija — za pristup je potreban AAI-račun.

Elementarne transformacije na matricama

Na retcima:

- **(1R):** zamjena dvaju redaka
- **(2R):** množenje jednog retka brojem različitim od nule
- **(3R):** dodavanje jednog retka pomnoženog brojem drugom retku

Slično na stupcima:

- **(1S):** zamjena dvaju stupaca
- **(2S):** množenje jednog stupca brojem različitim od nule
- **(3S):** dodavanje jednog stupca pomnoženog brojem drugom retku

Traženje inverza kvadratne matrice A.

(1) korak ... postaviti proširenu matricu $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I})$

(2) korak ... koristiti elementarne transformacije <u>isključivo nad retcima</u> proširene matrice: (1R), (2R) i (3R)

cilj:: na lijevoj polovici proširene matrice dobiti **I**

<u>Recept za postizanje cilja</u>

- za 1. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: **A** nema inverz
  - dalje nikad više mijenjati element (1,1)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 1. stupcu
- za 2. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: **A** nema inverz
  - dalje nikad više mijenjati element (2,2)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 2. stupcu
- itd

  ...
- za posljednji stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto posljednjeg dijagonalnog elementa
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: **A** nema inverz
  - dalje ne mijenjati posljednji dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u posljednjem stupcu

  STOP

inverz $\mathbf{A}^{-1}$:: na kraju pročitati na desnoj strani proširene matrice

I jedinična matrica istog reda kao **A**.

Primjer (1) Odrediti inverz i determinantu matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Izračunati $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}$.

Seminar #6

Primjer (2) Odrediti (ako postoji) inverz matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i izračunati $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}$.

Samostalna vježba: riješiti zadatak 9 iz dodatka 4.

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi Gaussovom metodom.

(1) korak ... zapisati jednadžbe matrično: $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$

(2) korak ... postaviti proširenu matricu $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$

(3) korak ... koristiti elementarne transformacije nad retcima proširene matrice: (1R), (2R) i (3R)

Pažljivo! ... moguće iskoristiti transformaciju (1S) nad stupcima. Tada se jednako mijenja vektor nepoznanica $\mathbf{X}$

vidi dodatak 4, zadatak 10, korak 3.

cilj:: na lijevoj polovici proširene matrice dobiti $\mathbf{I}$

Recept za postizanje cilja

- za 1. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)
    - ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u 1. retku sve samo nule tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u 1. retku nisu nule tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje nikad više mijenjati element (1,1)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 1. stupcu
- za 2. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)
    - ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u 2. retku sve samo nule tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u 2. retku nisu nule tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje nikad više mijenjati element (2,2)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 2. stupcu
- itd

  ...
- za posljednji stupac koji ima dijagonalni element:
  - namjestiti jedinicu na mjesto posljednjeg dijagonalnog elementa
    - ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u posljednjem. retku sve samo nule tada tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u posljednjem retku nisu nule tada tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje ne mijenjati posljednji dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u posljednjem stupcu

  STOP

Ako postoji redak s nulama na lijevoj strani, koji nema nule na desnoj strani jednadžba nema rješenje. Inače:

rješenje X:: na kraju pročitati na desnoj strani proširene matrice

u slučaju beskonačno rješenja:: stupce koji nemaju jedinicu na dijagonali iskoristiti u parametarskom zapisu rješenja

+ **rang matrice** A**::** jednak broju redaka koji na lijevoj strani nemaju sve nule

---

Primjer (3) Gaussovom metodom riješiti sustav linearnih jednadžbi i izračunati rang matrice sustava:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6 \end{aligned}$$

Važno! Uvijek provjeriti da li se zbilja množenjem matrice sustava i izračunatog vektora rješenja dobije desna strana.

Zapamti! **Regularne matrice** su kvadratne matrice koje imaju isti red i rang. Sve ostale matrice su **singularne.**

Primjer (4) Riješiti sustav linearnih jednadžbi i izračunati rang matrice sustava:

$$\begin{aligned} -2b - c + d &= -3 \\ -2a + c - 6d &= -1 \\ a + b + 2d &= 3 \\ -4a + 2b + 3c &= -25 \end{aligned}$$

Seminar #6

Ponekad je sustav linearnih jednadžbi ovisan o dodatnom nepoznatom parametru. Riješavamo kao da je taj parametar običan broj. Obično će i rješenje takvih sustava ovisiti o dodatnom parametru.
Pažnja! Kod dijeljenja s izrazom koji uključuje nepoznati parametar valja osigurati da se ne dijeli s nulom.

Primjer (5) Odrediti rang matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Riješiti matrični sustav $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dodatni nepoznati parametar λ.

Primjer (6) Riješiti sustav

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ -2x \qquad + z &= -2 \\ x + 2y - z &= 3 \\ -x + 2y + 12z &= 1 \end{aligned}$$

Seminar #6

Primjer (7) Riješiti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_1 - 8x_2 - 9x_3 &= -8 \\ 5x_1 + 5x_2 \qquad &= 14 \end{aligned}$$

Primjer (8) Riješiti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \qquad &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Samostalno riješiti zadatke 11, 12 i 13 iz dodatka 4.

Seminar #6

Računanje determinante svođenjem na trokutasti oblik

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica sa nulama van glavne dijagonale.
Gornje trokutasta matrica je kvadratna matrica sa nulama ispod glavne dijagonale.
Donje trokutasta matrica je kvadratna matrica sa nulama iznad glavne dijagonale.

Zapamti! Determinanta dijagonalne i trokutaste matrice jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata.

Fact. ***Veza elementarnih transformacija i determinante***

Na retcima:

- **(1R'):** zamjena dvaju redaka matrice uz zamijenu predznaka determinante
- **(2R'):** izlučivanje faktora determinante iz jednog retka matrice
- **(3R'):** dodavanje jednog retka pomnoženog brojem drugom retku matrice ne mijenja determinantu

Slično na stupcima:

- **(1S'):** zamjena dvaju stupaca matrice uz zamijenu predznaka determinante
- **(2S'):** izlučivanje faktora determinante iz jednog stupca matrice
- **(3S'):** dodavanje jednog stupca pomnoženog brojem drugom stupcu matrice ne mijenja determinantu

Pažnja! Elementarne transformacije tipa (1') i (2') mijenjaju determinantu

cilj:: elementarnim transformacijama na retcima i stupcima matricu svesti na trokutasti oblik

Recept za postizanje cilja

- za 1. stupac:
  - namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: $\det \mathbf{A} = 0$
  - dalje nikad više mijenjati prvi dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima ispod 1. retka namjestiti nule u 1. stupcu
- za 2. stupac:
  - namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: $\det \mathbf{A} = 0$
  - dalje nikad više mijenjati prvi i drugi dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima ispod 2. retka namjestiti nule u 2. stupcu
- za 3. stupac:
  - namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (3,3)
    - ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP: $\det \mathbf{A} = 0$
  - dalje nikad više mijenjati prva tri dijagonalna elementa
  - u svim ostalim retcima ispod 3. retka namjestiti nule u 3. stupcu
- ... i tako dalje do posljednjeg dijagonalnog elementa

$\det \mathbf{A} =$**:** umnožak izlučenih faktora i elemenata dijagonale trokutaste matrice

---

Primjer (9) Svođenjem na trokutasti oblik izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Izračunati istu determinantu razvojem po 3. stupcu.

Seminar #6

Važno! Determinatnu podmatricu koja se iz matrice **A** dobije ispuštanjem i–tog retka i j–tog stupca označujemo D_{ij}. Broj $(-1)^{i+j} D_{ij}$ označavamo sa A_{ij} i nazivamo <u>algebarski komplement</u> elementa a_{ij} matrice **A**.

(n): Za kvadratnu matricu <u>n-tog</u> reda vrijedi

$$\det A = a_{11}\underbrace{(-1)^{1+1} D_{11}}_{=A_{11}} + a_{21}\underbrace{(-1)^{2+1} D_{21}}_{=A_{21}} + \ldots + a_{n1}\underbrace{(-1)^{n+1} D_{n1}}_{=A_{n1}}$$

Zadatak 5. Izračunati $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

U definiciji determinante za opću matricu n-tog reda može se fiksirati bilo koji stupac ili redak, nije bilo potrebno uzeti baš prvi stupac. Za razvoj po k–tom stupcu vrijedi sljedeća formula (za razvoj po retku slično):

$$\det A = a_{1k}\underbrace{(-1)^{1+k} D_{1k}}_{=A_{1k}} + a_{2k}\underbrace{(-1)^{2+k} D_{2k}}_{=A_{2k}} + \ldots + a_{nk}\underbrace{(-1)^{n+k} D_{nk}}_{=A_{nk}}$$

Zadatak 6. Razvojem po četvrtom retku izračunajte $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

<u>U pravilu za računanje determinante biramo razvoj po onom retku ili stupcu koji ima najviše nula.</u>

Regularne matrice imaju determinatnu različitu od nule, a singularne matrice determinantu jednaku nula. **Važno!**

Zadatak 7. Računanjem determinante provjeri jesu li sljedeće matrice regularne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2 & -0.5 \\ -0.15 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$