Elementarne matrične transformacije:

(1) zamjena dvaju redaka (stupaca)

(2) množenje jednog retka (stupca) realnim brojem različitim od nule

(3) dodavanje jednog retka (stupca) pomnoženog realnim brojem drugom retku (stupcu)

Kad tražimo inverz matrice A, gornjim transformacijama je svodimo na jediničnu matricu, a istovremeno sve što radimo s A radimo i sa jediničnom matricom. Rezultat je inverzna matrica A^{-1}.

Zadatak 8 *Za matricu* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *izračunajte* A^{-1}.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
(A|I) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 2 & 3 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim^2 \\
&\sim^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^4 \\
&\sim^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} = (I|A^{-1}),
\end{aligned}
$$

gdje su redom primjenjene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i drugog retka

(2) prvi redak pomnožen s -2 i dodan drugom retku

(3) drugi redak pomnožen s 2 i dodan prvom retku

(4) prvi redak pomnožen s -1.

Odavdje jednostavno pročitamo desni dio matrice $(I|A^{-1})$ - to je inverzna matrica:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 9 *Koristeći transformacije matrica odredite inverz sljedećih matrica:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Kada radimo s linearnim sustavim, postupak je vrlo sličan; proširena matrica sustava se analognim transformacijama svodi na gornji (donji) trokutasti ili dijagonalni oblik iz kojeg se onda lako očita rješenje. Pri tome se smiju koristiti samo transformacije na retcima, manipuliranje sa stupcima nije dozvoljeno. To je tzv. Gauss-Jordanova metoda.

Zadatak 10 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 5x + 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + t &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Napravimo proširenu matrcu sustava i transformiramo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6$$

$$\sim^6 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^8$$

$$\sim^8 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

gdje su redom korištene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i četvrtog retka (kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak rješavanja sustava putem elementarnih transformacija - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali!)

(2) prvi redak pomnožen redom s -1, -4 i -5 i dodan redom drugom, trećem i četvrtom retku (želja nam je dobiti nule na svim nedijagonalnim elementima)

(3) zamjena drugog i trećeg stupca (kako bismo kao drugi dijagonalni element - na presjeku drugog retka i drugog stupca - također imali jedinicu) - bitno je ovdje primjetiti da su time varijble y i z zamijenile mjesta. Naime, varijabli y sada pripada treći, a varijabli z drugi stupac.

(4) drugi redak pomnožen redom s -1, 2 i 1 i dodan redom prvom, trećem i četvrtom retku (vidi napomenu uz (2))

(5) treći redak pomnožen s -1 i dodan četvrtom retku (kako bismo dobili nulu na jedinom preostalom nedijalgonalnom elementu četvrtog retka i jedinicu na dijagonalnom elementu)

(6) četvrti redak pomnožen redom s -1 i 4 i dodan redom prvom i trećem retku (vidi napomenu uz (2))

(7) treći redak podijeljen s -7 (kako bi na dijagonalnom elementu trećeg retka dobili jedinicu)

(8) treći redak pomnožen redom s -3 i 2 i dodan redom prvom i drugom retku (vidi napomenu uz (2))

Ovim postupkom dolazimo do proširene matrice sustava koji je ekvivalentan početnom, pa ima isto rješenje. Međutim, rješenje ovog sustava možemo jednostavno pročitati iz proširene matrice koju smo dobili (uz napomenu da su y i z zamijenili mjesta): $x = 1$, $z = -1$, $y = -1$, $t = 1$, pa uređena četvorka $(1, -1, -1, 1)$ čini jedinstveno rješenje početnog sustava.

Zadatak 11 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\\
8x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 12 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
4x - y + z + 2u &= 14\\
2x + y - 3u &= 2\\
x - y + 2z + u &= 3\\
2x + y + z - 4u &= 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 13 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
-3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3\\
4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2\\
4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= -33.
\end{aligned}$$