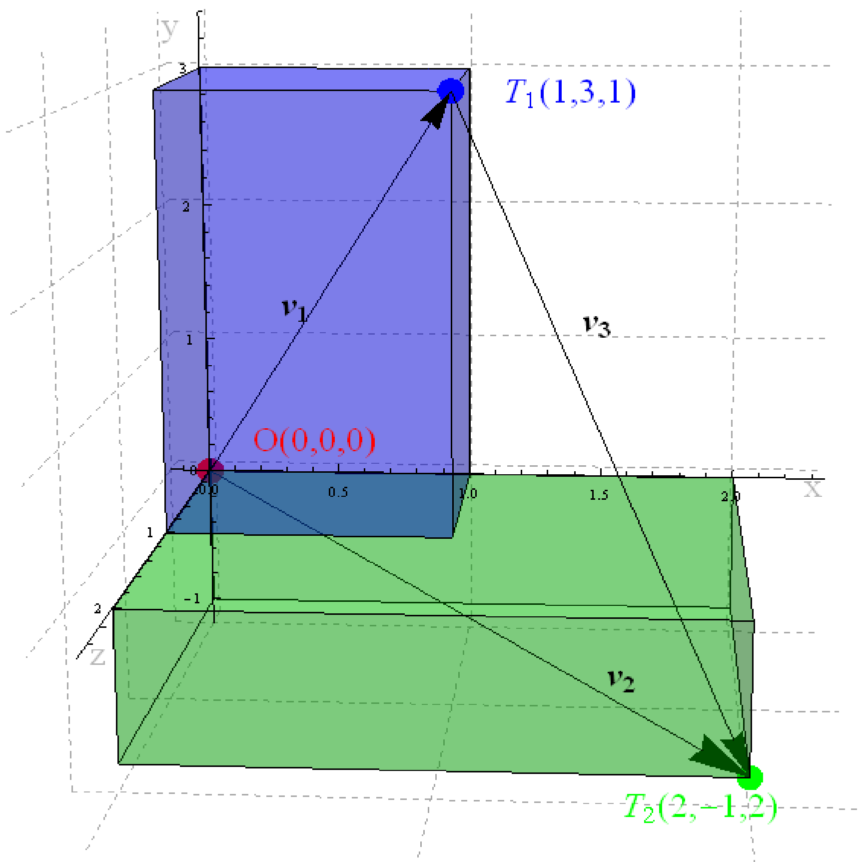
Seminar 7

Priprema

Ovaj seminar je obrađen kratkim video isječcima koji se mogu pogledati na »Moodle« mrežnoj stranici predmeta.

Uvjet za sudjelovanje na seminaru je prijava na »Moodle« stranice kolegija. Prijava podrazumijeva da je student jednom u desnom stupcu sadržaja »Moodle« stranice u bloku Administracija odabrao link Prijava. Pristup na stranice kolegija zahtjeva AAI–račun čija aktivacija može trajati nekoliko dana. Studenti koji nemaju drugi način pristupa internetu imaju mogućnost besplatnog pristupa u čitaonici Sveučilišne knjižnice (mjesto je potrebno rezervirati unaprijed). Studentima koji do termina seminara nisu napravili prijavu neće biti evidentirano sudjelovanje na seminaru.



Slika 0.0.1. Prikaz nekih vektora

Vektori kao matrice

Vektorom možemo podrazumijevati jednostupčanu ili jednoretčanu matricu. Kada je riječ o vektoru u trodimenzionalnom prostoru podrazumijevamo matricu tipa (3,1) ili (1,3) , a kada je riječ o dvodimenzionalnom prostoru riječ je o matricama tipa (2,1) ili (1,2). Ponekad se vektor zapisuje i kao lista brojeva omeđena oblim zagradama.

Primjer 1. Zapis tri vektora u trodimenzionalnom prostoru

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v_3} = (1, -4, 1)$

Primjer 2. Vektore možemo zbrajati kao matrice, po elementima:

$\mathbf{v_1} + \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v_2}$

Predočavanje vektora u prostoru

Vektor $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ može se zamišljati kao **radij–vektor**: usmjerena dužina $\overrightarrow{OT}$ od ishodišta O do točke $T(a, b, c)$.

Isti vektor $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ može se predočiti **usmjerenom dužinom** $\overrightarrow{T_1T_2}$ gdje je za polaznu točku uzeta točka $T_1(x_0, y_0, z_0)$, a završnu točku $T_2\,(x_0 + a,\ y_0 + b,\ z_0 + c)$.

Primjer 3. Prikaz vektora iz primjera 1.: $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ kao radij–vektori u prostoru i vektor $\mathbf{v_3}$ kao usmjerena dužine od točke $T_1(1, 3, 1)$ do točke $T_2(2, -1, 2)$ nalazi se na slici 1.

Primijeti, ako je zadan vektor i proizvoljna početna točka usmjerene dužine koja prikazuje taj vektor tada je završna točka potpuno određena. Ako su zadani početna točka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i završna točka $T_2(x_2, y_2, z_2)$ tada usmjerena dužina $\overrightarrow{T_1T_2}$ prikazuje vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$.

Primjer 4. Zadane su točke $A(3, 1, 5)$ i $B(-1, -2, 7)$. Odrediti vektor $\mathbf{w}$ određen usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$.

Koordinatni vektori

Definicija. Posebni vektori $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nazivaju se **koordinatni vektori**. Proizvoljni vektor u prostoru $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ dopušta zapis pomoću koordinatnih vektora:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$$

Primjer 5. Prikazati pomoću koordinatnih vektore iz primjera 1.

Skalarno množenje

Definicija. Skalarno množenje ili **skalarni produkt** dva vektora $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ označava se $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}$ i računa kao broj

$$\boxed{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}.$$

Primjer 6. Skalarno pomnožiti vektore $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ iz primjera 1.

Duljina vektora

Definicija. Duljina vektora naziva se još i norma vektora. Za vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ označava se $\|\mathbf{v}\|$ i računa formulom:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Duljina vektora odgovara duljini svake usmjerene dužine kojom se može prikazati taj vektor.

Primjer 7. Odrediti udaljenost između točaka T_1 i T_2 iz primjera 3. preko duljine vektora kojeg određuje usmjerena dužina $\overrightarrow{T_1T_2}$.

Kut između vektora

Kada su zadana dva vektora $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ možemo promatrati točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i pripadne radij–vektore $\overrightarrow{OT_1}$ i $\overrightarrow{OT_2}$. Kut između dvije dužine sa istom polaznom točkom je od ranije dobro definiran pojam. Stoga se kut između vektora $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ (oznaka $\angle(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$) uzima kao kut između radij–vektora $\overrightarrow{OT_1}$ i $\overrightarrow{OT_2}$ koji je u intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Naravno, može se pokazati da kut između dvije usmjerene dužine s istom početnom točkom koje prikazuju vektore $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ ne ovisi o izboru početne točke.

Kut između vektora $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ može se računati iz jednadžbe

$$\boxed{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = \|\mathbf{v_1}\|\,\|\mathbf{v_2}\|\,\cos\angle(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}).}$$

Primjer 8. Kut između pravaca OT_1 i OT_2 naznačiti na slici 1. i izračunati gornjom formulom.

Seminar #7

Vektorsko množenje

Definicija. **Vektorsko množenje** ili **vektorski produkt** dva vektora $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ označava se $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$ i računa kao <u>vektor</u>

$$\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\overrightarrow{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\overrightarrow{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\overrightarrow{k}$$

$$\text{ili } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Primjer 9. Za vektore iz primjera 1. izračunati $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$.

Vrijedi jednadžba koja vezuje vektorsko množenje i kut između vektora:

$$\boxed{\|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}\| = \|\mathbf{v_1}\| \, \|\mathbf{v_2}\| \sin \angle (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})}.$$

Primjer 10. Pomoću gornje formule izračunati kut između vektora $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ iz primjera 1. Provjeriti rezultat primjera 8.

Vrijedi sljedeće

vektor $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$ je okomit na vektore $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$.

Primjer 11. Provjeriti kut između vektora $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$, te $\mathbf{v_2}$ i $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$ iz primjera 9.

Također, vrijedi:

broj $\|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}\|$ odgovara površini paralelograma kojeg određuju usmjerene dužine iz iste točke odgovarajuće vektorima $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$.

Mješovito množenje

Definicija. **Mješovito množenje** ili **mješoviti produkt** tri vektora $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ označava se $(\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3}$ i računa kao broj

$$\boxed{(\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Zapamti! Mješoviti produkt tri vektora odgovara volumenu paralelepipeda (nakošenog kvadra) koji je određen trima usmjerenim dužinama koje počinju u istoj točki, a određene su istim danim vektorima.

Primjer 12. Odrediti volumen paralelepipeda određenog vektorima $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ i $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$ iz primjera 9.

Važno! Četiri točke T_1, T_2, T_3 i T_4 su komplanarne (pripadaju istoj ravnini) ako i samo ako je mješoviti umnožak vektora odgovarajućih usmjerenim dužinama $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_3}$ i $\overrightarrow{T_1T_4}$ jednak nula.

Primjer 13. Odrediti komplanarnost točaka $T_1(2, 2, 2)$, $T_2(-1, -4, -3)$, $T_3(-2, 3, 5)$ i $T_4(1, 0, 1)$.

Zadatak. Odrediti komplanarnost točaka $T_1(2, 2, 2)$, $T_2(-1, -4, -3)$, $T_3(-2, 3, 5)$ i $T_4(1, 9, 10)$.