

## Seminar 6

*Napomena.* Posljednja stranica seminarskih materijala za seminar 5 je ažurirana i pridodana kao posljednja stranica materijala za ovaj seminar.

### Potrebno predznanje

Studenti trebaju biti upoznati s elementarnim transformacijama na matrici.

### Priprema

Pročitajte tekst iz dodatka 4 (Baranović, Jerković, Vježbe iz matematike 1, skripta, str. 45-47). Savladajte primjere iz zadatka 7 i 10 u dodatku 4.

NA ZNANJE STUDENTIMA! Već je obrađen veći dio gradiva koji će biti uključen u prvi kolokvij. Provjere znanja koje su uvjet za izlazak na kolokvij zahtjevaju dosta vremena i truda. Studenti koji još nisu započeli sa rješavanjem ovih provjera možda zbog pomanjkanja vremena neće biti u mogućnosti riješiti provjere i ispuniti uvjet za izlazak na kolokvij. Nadalje, seminarski materijali biti će dostupni samo preko Moodle mrežnog mjesta ovog kolegija — za pristup je potreban AAI-račun.

### Elementarne transformacije na matricama

Na retcima:

- (1R):** zamjena dvaju redaka
- (2R):** množenje jednog retka brojem različitim od nule
- (3R):** dodavanje jednog retka pomnoženog brojem drugom retku

Slično na stupcima:

- (1S):** zamjena dvaju stupaca
- (2S):** množenje jednog stupca brojem različitim od nule
- (3S):** dodavanje jednog stupca pomnoženog brojem drugom retku

**Traženje inverza kvadratne matrice  $\mathbf{A}$ .**

- (1) korak ... postaviti proširenu matricu  $(\mathbf{A} | \mathbf{I})$
- (2) korak ... koristiti elementarne transformacije isključivo nad retcima proširene matrice: (1R), (2R) i (3R)

$\mathbf{I}$  jedinična  
matrica  
istog reda  
kao  $\mathbf{A}$ .

**cilj::** na lijevoj polovici proširene matrice dobiti  $\mathbf{I}$

Recept za postizanje cilja

- za 1. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\mathbf{A}$  nema inverz
  - dalje nikad više mijenjati element (1,1)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 1. stupcu
- za 2. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\mathbf{A}$  nema inverz
  - dalje nikad više mijenjati element (2,2)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 2. stupcu
- itd
- ...
- za posljednji stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto posljednjeg dijagonalnog elementa
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\mathbf{A}$  nema inverz
  - dalje ne mijenjati posljednji dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u posljednjem stupcu

STOP

**inverz  $\mathbf{A}^{-1}$ ::** na kraju pročitati na desnoj strani proširene matrice

**Primjer (1)** Odrediti inverz i determinantu matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Izračunati  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$ .

Primjer (2) Odrediti (ako postoji) inverz matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  i izračunati  $AA^{-1}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R2-2R1 \\ R3+3R1 \\ R4-2R1 \end{array} \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{5} & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{5}R2 \\ R1+2R2 \\ R3+6R2 \\ R4-5R2 \end{array} \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{5}{11}R3 \\ R1+\frac{2}{5}R3 \\ R2-\frac{4}{5}R3 \end{array} \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -\frac{7}{11} & 0 & -\frac{4}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R1+\frac{5}{11}R4 \\ R2+\frac{1}{11}R4 \\ R3+\frac{7}{11}R4 \end{array} \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} I \\ A^{-1} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) = \frac{-11-14}{55} = \frac{-25}{55} = \frac{-5}{11} \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{6}{11}\right) = \frac{22-12}{55} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) = \frac{11-6}{55} = \frac{5}{55} = \frac{1}{11} \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) = \frac{-33+28}{55} = -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{6}{11}\right) = \frac{11+24}{55} = \frac{7}{11} \\ -\frac{2}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) = \frac{-22+12}{55} = -\frac{2}{11} \end{array} \right\} & A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} P \\ V \\ O \\ R \\ A \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} + \frac{1}{11} & -\frac{6}{11} + \frac{6}{11} & -\frac{5}{11} + \frac{4}{11} & \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} + \frac{1}{11} - 1 & -\frac{6}{11} - \frac{6}{11} + 1 & -\frac{4}{11} + \frac{4}{11} & \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \\ -\frac{15}{11} - \frac{2}{11} + 2 & \frac{9}{11} + \frac{13}{11} - 2 & \frac{5}{11} + \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} + \frac{3}{11} \\ \frac{5}{11} - \frac{2}{11} - \frac{14}{11} + 1 & -\frac{3}{11} - \frac{12}{11} + \frac{26}{11} - 1 & -\frac{2}{11} - \frac{8}{11} + \frac{10}{11} & \frac{1}{11} + \frac{6}{11} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = I \end{aligned}$$

**Rješavanje sustava linearnih jednadžbi Gaussovom metodom.**

- (1) korak ... zapisati jednadžbe matrično:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$
- (2) korak ... postaviti proširenu matricu  $(\mathbf{A} | \mathbf{B})$
- (3) korak ... koristiti elementarne transformacije nad retcima proširene matrice: (1R), (2R) i (3R)

*Pažljivo!* ... moguće iskoristiti transformaciju (1S) nad stupcima. Tada se jednako mijenja vektor nepoznanica  $\mathbf{X}$

**cilj::** na lijevoj polovici proširene matrice dobiti  $\mathbf{I}$

Recept za postizanje cilja

- za 1. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u 1. retku sve samo nule tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u 1. retku nisu nule tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje nikad više mijenjati element (1,1)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 1. stupcu
- za 2. stupac:
  - namjestiti jedinicu na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u 2. retku sve samo nule tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u 2. retku nisu nule tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje nikad više mijenjati element (2,2)
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u 2. stupcu
- itd
- ...
- za posljednji stupac koji ima dijagonalni element:
  - namjestiti jedinicu na mjesto posljednjeg dijagonalnog elementa
    - \* ako se prethodno ne može ostvariti:
      - ako su u posljednjem. retku sve samo nule tada tada STOP: jednadžba ima beskonačno rješenja
      - ako na desnoj strani u posljednjem retku nisu nule tada tada STOP: jednadžba nema rješenje
  - dalje ne mijenjati posljednji dijagonalni element
  - u svim ostalim retcima namjestiti nule u posljednjem stupcu

STOP

Ako postoji redak s nulama na lijevoj strani, koji nema nule na desnoj strani jednadžba nema rješenje. Inače:

**rješenje  $\mathbf{X}$ ::** na kraju pročitati na desnoj strani proširene matrice

**u slučaju beskonačno rješenja::** stupce koji nemaju jedinicu na dijagonali iskoristiti u parametarskom zapisu rješenja

+ **rang matrice  $\mathbf{A}$ ::** jednak broju redaka koji na lijevoj strani nemaju sve nule

Primjer (3) Gaussovom metodom riješiti sustav linearnih jednadžbi i izračunati rang matrice sustava:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -5 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & -6 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 7R_2 \\ R_4 + 3R_2 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{8}R_3 \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 + 3R_3 \\ R_2 - R_3 \\ \\ R_4 - 7R_3 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -17/4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{4}{17}R_4 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - \frac{1}{4}R_4 \\ R_2 - \frac{1}{4}R_4 \\ R_3 + \frac{1}{4}R_4 \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \\ u=0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = 4 \\ r(A) = 4$$

Važno! Uvijek provjeriti da li se zbilja množenjem matrice sustava i izračunatog vektora rješenja dobije desna strana.

Zapamti! Regularne matrice su kvadratne matrice koje imaju isti red i rang. Sve ostale matrice su singularne.

Primjer (4) Riješiti sustav linearnih jednadžbi i izračunati rang matrice sustava:

$$\begin{aligned} da - 2b - c + d &= -3 \\ -2a + c - 6d &= -1 \\ a + b + 2d &= 3 \\ -4a + 2b + 3c &= -25 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ -25 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & -25 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ R_2 + 2R_1 \\ \\ R_4 + 4R_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & -13 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & -13 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 - 6R_2 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 3 & 13/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -28 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -28 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ (-1)R_3 \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -28 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - 3R_3 \\ R_2 + R_3 \\ \\ R_4 - 14R_3 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

beskonačno rješenja

$$X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 1/2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

DRUGI NAČIN: RASPISIVANJE

$$\left. \begin{array}{l} a - \frac{1}{2}c = 13/2 \\ b + \frac{1}{2}c = 1/2 \\ d = -2 \\ c = \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ c = \lambda \\ d = -2 \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ -25 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ -25 \end{pmatrix} \checkmark \quad r(A) = 3$$

P  
R  
O  
V  
E  
R  
I  
T  
I

Seminar #6

Ponekad je sustav linearnih jednažbi ovisan o dodatnom nepoznatom parametru. Riješavamo kao da je taj parametar običan broj. Obično će i rješenje takvih sustava ovisiti o dodatnom parametru.

**Pažnja!** Kod dijeljenja s izrazom koji uključuje nepoznati parametar valja osigurati da se ne dijeli s nulom.

Primjer (5) Odrediti rang matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Riješiti matricni sustav  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Dodatni nepoznati parametar  $\lambda$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & \lambda & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R2-2R1 \\ R3-R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R1-R2 \\ R3-R2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda-1=0$  tada  $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sustav} \\ \text{nema} \\ \text{rješenja} \end{matrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$\lambda-1 \neq 0$  tada  $\lambda \neq -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & | & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda-1} R3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} R1+R3 \\ R2-2R3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sustav} \\ \text{ima} \\ \text{jedinstveno} \\ \text{rješenje} \end{matrix} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$

APLIKACIJA  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} + \frac{\lambda-3}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{2}{\lambda-1} + \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ -\frac{1}{\lambda-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda-1} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda-1} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Primjer (6) Riješiti sustav

$$\begin{matrix} x+2y+3z = 3 \\ -2x+z = -2 \\ x+2y-z = 3 \\ -x+2y+12z = 1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ -2 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ -1 & 2 & 12 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2+2R1 \\ R3-R1 \\ R4+R1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 4 & 7 & | & 4 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 15 & | & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{4}R2 \\ R4-4R2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & | & 1 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 15 & | & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R1-2R2 \\ R4-4R2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & | & 1 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{4})R3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R1+\frac{1}{2}R3 \\ R2-\frac{7}{4}R3 \\ R4-8R3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

APLIKACIJA  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -2 \\ 1+2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Primjer (7) Riješiti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_1 - 8x_2 - 9x_3 &= -8 \\ 5x_1 + 5x_2 &= 14 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -8 & -9 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \\ A \quad X \quad B \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -8 & -9 & -8 \\ 5 & 5 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 5R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -16 \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{5})R_2 \\ R_3 + 10R_2 \\ R_4 + 5R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ R_3 + 10R_2 \\ R_4 + 5R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

SAMOSTALNO ODABERI  
DVA RAZLIČITA RJEŠENJA  
I UVRSTI IH U SUSTAV  
KAKO BI PROVERIO DA  
JE RIJEŠENJE TOČNO.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} + \lambda \\ x_2 = \frac{6}{5} - \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

## Primjer (8) Riješiti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 9R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{2})R_2 \\ R_3 + 8R_2 \\ R_4 + 2R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ R_3 + 8R_2 \\ R_4 + 2R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -10 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1)R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_4 + R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

↑ ↑  
a b  
" "  
x<sub>4</sub> x<sub>5</sub>  
SAMOSTALNO  
PROVERITI

## Računanje determinante svodenjem na trokutasti oblik

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica sa nulama van glavne dijagonale.

Gornje trokutasta matrica je kvadratna matrica sa nulama ispod glavne dijagonale.

Donje trokutasta matrica je kvadratna matrica sa nulama iznad glavne dijagonale.

**Zapamti!** Determinanta dijagonalne i trokutaste matrice jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata.

**Fact.** *Veza elementarnih transformacija i determinante*

Na retcima:

**(1R')**: zamjena dvaju redaka matrice uz zamjenu predznaka determinante

**(2R')**: izlučivanje faktora determinante iz jednog retka matrice

**(3R')**: dodavanje jednog retka pomnoženog brojem drugom retku matrice ne mijenja determinantu

Slično na stupcima:

**(1S')**: zamjena dvaju stupaca matrice uz zamjenu predznaka determinante

**(2S')**: izlučivanje faktora determinante iz jednog stupca matrice

**(3S')**: dodavanje jednog stupca pomnoženog brojem drugom stupcu matrice ne mijenja determinantu

**Pažnja!** Elementarne transformacije tipa (1') i (2') mijenjaju determinantu

**cilj**:: elementarnim transformacijama na retcima i stupcima matricu svesti na trokutasti oblik

Recept za postizanje cilja

• za 1. stupac:

– namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (1,1)

\* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\det \mathbf{A} = 0$

– dalje nikad više mijenjati prvi dijagonalni element

– u svim ostalim retcima ispod 1. retka namjestiti nule u 1. stupcu

• za 2. stupac:

– namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (2,2)

\* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\det \mathbf{A} = 0$

– dalje nikad više mijenjati prvi i drugi dijagonalni element

– u svim ostalim retcima ispod 2. retka namjestiti nule u 2. stupcu

• za 3. stupac:

– namjestiti jedinicu ili drugi pogodan broj na mjesto dijagonalnog elementa (3,3)

\* ako se prethodno ne može ostvariti tada STOP:  $\det \mathbf{A} = 0$

– dalje nikad više mijenjati prva tri dijagonalna elementa

– u svim ostalim retcima ispod 3. retka namjestiti nule u 3. stupcu

• ... i tako dalje do posljednjeg dijagonalnog elementa

$\det \mathbf{A} =$ : umnožak izlučenih faktora i elemenata dijagonale trokutaste matrice

**Primjer (9)** Svodenjem na trokutasti oblik izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Izračunati istu determinantu razvojem po 3. stupcu.

**Važno!** Determinatnu podmatricu koja se iz matrice  $\mathbf{A}$  dobije ispuštanjem  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca označujemo  $D_{ij}$ . Broj  $(-1)^{i+j} D_{ij}$  označavamo sa  $A_{ij}$  i nazivamo algebarski komplement elementa  $a_{ij}$  matrice  $\mathbf{A}$ .

**(n):** Za kvadratnu matricu  $n$ -tog reda vrijedi

$$\det A = a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1} D_{11}}_{=A_{11}} + a_{21} \underbrace{(-1)^{2+1} D_{21}}_{=A_{21}} + \dots + a_{n1} \underbrace{(-1)^{n+1} D_{n1}}_{=A_{n1}}$$

Zadatak 5. Izračunati

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

U definiciji determinante za opću matricu  $n$ -tog reda može se fiksirati bilo koji stupac ili redak, nije bilo potrebno uzeti baš prvi stupac. Za razvoj po  $k$ -tom stupcu vrijedi sljedeća formula (za razvoj po retku slično):

$$\det A = a_{1k} \underbrace{(-1)^{1+k} D_{1k}}_{=A_{1k}} + a_{2k} \underbrace{(-1)^{2+k} D_{2k}}_{=A_{2k}} + \dots + a_{nk} \underbrace{(-1)^{n+k} D_{nk}}_{=A_{nk}}$$

Zadatak 6. Razvojem po četvrtom retku izračunajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

U pravilu za računanje determinante biramo razvoj po onom retku ili stupcu koji ima najviše nula.

Regularne matrice imaju determinatnu različitu od nule, a singularne matrice determinantu jednaku nula. **Važno!**

Zadatak 7. Računanjem determinante provjeri jesu li sljedeće matrice regularne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2 & -0.5 \\ -0.15 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$