Seminar 8 (Granična vrijednost ili limes niza)

Potrebno predznanje

Osnovno o nizovima realnih brojeva.

Priprema

Pročitajte, ako treba i više puta str. 115–118 u knjizi. Obratite pažnju na sve definicije, primjere i iskaze teorema (bez dokaza), općenito je najvažnije ono otisnuto **masnim** slogom.

Prof. Uglešić je isto gradivo ovaj tjedan obrađivao na predavanjima.

Vaša pripremljenost će se provjeravati! Trebali bi znati ispričati nešto o onome što ste pročitali, znati reći nešto o pojmovima koji su uvedeni u tom dijelu knjige, znati navesti primjere iz knjige ili vlastite.

Pročitajte sljedeću stranicu ovog materijala na kojoj je jedan dio gradiva iz knjige obrađen na malo drugačiji način.

Obavezno ponijeti računar.

Uz ove materijale ispisati i na seminar ponijeti Dodatak 5.

Niz realnih brojeva (a_n) je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Možemo ga zamišljati kao beskonačnu uređenu listu[1] realnih brojeva:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33},$

Primjer (1). Niz realnih brojeva zadan pravilom za računanje članova niza: $a_n = \arctan(n)$. Poredak prvih članova u tom nizu izgleda približno ovako (članovi izraženi na pet decimala):

(0.78539, 1.10714, 1.24904, 1.32581, 1.37340, 1.40564, 1.42889, 1.44644, 1.46013, 1.47112, 1.48013, 1.48765, 1.49402, 1.49948, 1.504

Ovaj niz je rastući zato jer je funkcija arctan rastuća. Također je i ograničen jer je funkcija arctan ograničena sa supremumom $\frac{\pi}{2} \approx 1.570796$.

Neka je ε neki »maleni« pozitivni realni broj: $\varepsilon > 0$ i neka je x bilokoji realan broj: $x \in \mathbb{R}$. **ε-okolina broja x** je skup $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle$, dakle svi brojevi između $x - \varepsilon$ i $x + \varepsilon$, odnosno svi brojevi koji su za manje od ε udaljeni od x.

Kažemo da **niz (a_n) leži u skupu** S kada su svi članovi niza (a_n) elementi skupa S.

Primjer (2). Možemo reći da niz (a_n) iz primjera (1) leži u 0.6-okolini realnog broja 1 jer su svi članovi niza počevši od prvog $\frac{\pi}{4} = 0.78539$ i svaki veći dalje ujedno manji od $\frac{\pi}{2} \approx 1.570796$, dakle nalaze se unutar intervala $\langle 1 - 0.6,\ 1 + 0.6\rangle = \langle 0.4,\ 1.6\rangle$.

Stražnji dio niza (a_n) iza k-tog člana je niz (b_n) kojem su članovi $b_n = a_{k+n}$.

Primjer (3). Stražnji dio niza iz primjera (1) iza trećeg člana je niz čiji su članovi dani formulom $b_n = \arctan(n + 3)$ i čiji početak izgleda približno ovako (članovi na pet decimala):

(1.32581, 1.37340, 1.40564, 1.42889, 1.44644, 1.46013, 1.47112, 1.48013, 1.48765, 1.49402, 1.49948, 1.50422, 1.50837, 1.51204, 1.515

Usporedi poredak prvih članova niza iz primjera (3) sa poretkom istih članova u nizu iz primjera (1).

Realni broj L je **granična vrijednost** (ili **limes**) niza (a_n) ako *za svaku* (proizvoljno malu) ε-okolinu broja L postoji neki stražnji dio istog niza koji cijeli leži u njoj. Granična vrijednost niza označava se izrazom $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ako niz ima graničnu vrijednost kažemo da je **konvergentan**, a ako nema kažemo da je **divergentan**.

Zapamti! Ako postoji limes je jedinstven.

Primjer (4). Broj 1 nije granična vrijednost niza iz primjera (1) jer ako uzmemo $\varepsilon = 0.5$ tada za 0.5-okolinu broja 1 (što odgovara skupu $\langle 0.5,\ 1.5\rangle$) ne postoji stražnji dio istog niza koji leži u njoj. Naime, niz iz primjera (1) na petnaestom mjestu i dalje uključuje samo brojeve koji su veći od 1.5, tako da svaki stražnji dio tog niza ima članove koji van skupa $\langle 0.5,\ 1.5\rangle$.

Primjer (5). Broj $L = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$ je granična vrijednost niza iz primjera (1). Za proizvoljno malu ε-okolinu broja $\frac{\pi}{2}$ možemo uzeti prirodan broj $k \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ i cijeli stražnji dio predmetnog niza iza k-tog člana će ležati u odabranoj ε-okolini. To je stoga što za $k \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ vrijedi $a_k = \arctan(k) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ i niz je rastući pa su sljedeći članovi niza nakon k-tog još i veći od $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, a nikad veći od $\frac{\pi}{2}$, dakle leže unutar intervala $\left\langle \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right\rangle$.

Oznaka za **divergenciju u beskonačno** je ∞ (kada ne želimo biti sasvim određeni). Kada želimo biti posve određeni za niz (a_n) pišemo :

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ kada za svaki proizvoljno veliki pozitivan broj $G > 0$ postoji stražnji dio niza koji cijeli leži iznad G,
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ kada za svaki proizvoljno veliki negativan broj $D < 0$ postoji stražnji dio niza koji cijeli leži ispod D.

[1]Uređena lista znači da svako mjesti u listi ima pridružen jedinstveni redni broj $n \in \mathbb{N}$.

Glavni dio seminara

Granična vrijednost niza čiji su članovi određeni polinomom ovisi samo od najveće potencije polinoma.

Primjer (6). $p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 8$ ima najveću potenciju $n = 3$. Niz (a_n) takav da je $a_n = 3n^3 - n^2 + 2n - 8$ divergira u $+\infty$ budući da i niz $\left(3n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira u $+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 - n^2 + 2n - 8 = \lim_{n\to\infty} 3n^3 = +\infty$$

Ta činjenica se ogleda u grafu funkcije $f(x) = x^3$ koji na desnom dijelu neograničeno raste.

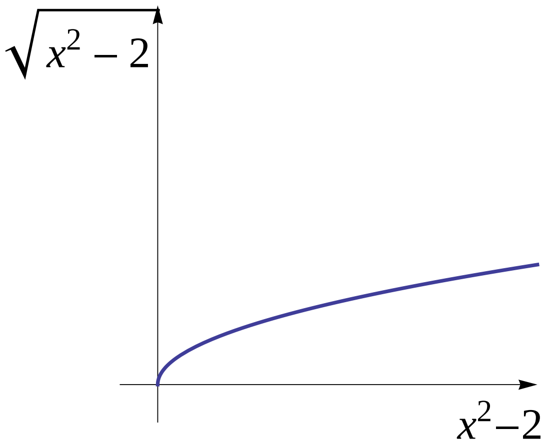
Primjer (7). $p(x) = -2x^2 + 100x$ ima najveću potenciju $n = 2$. Niz (a_n) takav da je $a_n = -2n^2 + 100n$ divergira u $-\infty$ budući da i niz $\left(-2n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira u $-\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} -2n^2 + 100n = \lim_{n\to\infty} -2n^2 = -\infty$$

Ta činjenica se ogleda u grafu funkcije $f(x) = x^2$ koji na desnom dijelu neograničeno raste, točnije grafu od$-x^2$ koji na desnoj strani neograničeno pada.

Kompozicija dvije neograničeno rastuće funkcije je neograničeno rastuća funkcija.

Primjer (8). Niz $\left(\sqrt{n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira u $+\infty$ budući da su funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2 - 2$ neograničeno rastuće. Možemo zamišljati: kako raste parametar $x^2 - 2$ tako raste i funkcija drugi korijen od tog parametra $\sqrt{x^2-2}$.



Dalje riješavamo odabrane zadatke iz dodatka 5.

Važno! Rješenje uvijek provjeriti računarom tako da ispitate vrijednosti izraza za "dovoljno veliki" parametar.