Glavni dio seminara

Određivanje toka funkcije f implicitno zadane određenim algebarskim izrazom podrazumijeva crtanje skice grafa funkcije na temelju određivanja sljedećeg:

(1) domena: $\mathcal{D}(f)$,

(2) asimptote: *ispituju se na rubovima domene ili u točkama prekida*,

(3) globalna svojstva
- omeđenost: *zaključak izvodimo iz asimptota*,
- parnost i neparnost: *uspoređujemo $f(-x)$ sa $f(x)$ i $-f(x)$*,
- periodičnost: *na osnovi periodičnosti trigonometrijskih funkcija.*

(4) sjecišta sa koordinatnim osima: *horizontalnom (za koji parametar x vrijedi $f(x) = 0$) i vertikalnom (koliko iznosi $f(0)$)*,

(5) prva i druga derivacija: f' i f'',

(6) kritične točke: *nalaze se na $\mathcal{D}(f)$ tamo gdje $f'(x)$ nije definirana ili je $f'(x) = 0$*,

(7) monotonost: funkcija raste tamo gdje je $f'(x) > 0$, a pada gdje je $f'(x) < 0$,

(8) lokalni ekstremi koji mogu biti:
- kritične točke u kojima se rast mijenja u pad ili obratno: *na osnovu ispitivanja monotonosti (prvi dovoljan uvjet za lokalni ekstrem), a može se još jednom provjeriti i pomoću druge derivacije (drugi dovoljan uvjet za lokalni ekstrem)*
- i točke na rubu domene,

(9) globalni ekstremi: *globalni minimum je najmanji od lokalnih minimuma ili ne postoji ako je funkcija neograničena odozdo, a globalni maksimum najveći od lokalnih maksimuma ili ne postoji ako je funkcija neomeđena odozgo,*

(10) riješiti $f''(x) = 0$, a na temelju toga odrediti konveksnost (*gdje je $f'' \geq 0$*), konkavnost ($f'' \leq 0$) i točke infleksije (*gdje f'' mijenja predznak*).

Važno! Ukoliko se nekoliko pokazatelja na osnovi kojih se crta graf ne uklapa zajedno, sigurno je došlo do pogreške u određivanju tih pokazatelja pa treba provjeriti određivanje onih svojstava koja su međusobno kontradiktorna.

Ponekad dio navedenih svojstava zbog kompleksnosti izraza ne možemo odrediti. Tada ne preostaje drugo već pokušati napraviti skicu grafa samo na osnovi onog dijela pokazatelja koji su uspješno izračunati.

Primjer 1. Odrediti tok funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. *Vidi* `http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1_20090922.pdf`

$\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_+} \dfrac{x}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0_+}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to 1_-} f(x) = -\infty$ V.A.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$ H.A.

$f'(x) = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2} \neq 0 \ \forall x$ Nema kritičnih točaka.

$f''(x) = \dfrac{+2}{(x-1)^3}$ Nema točaka infleksije

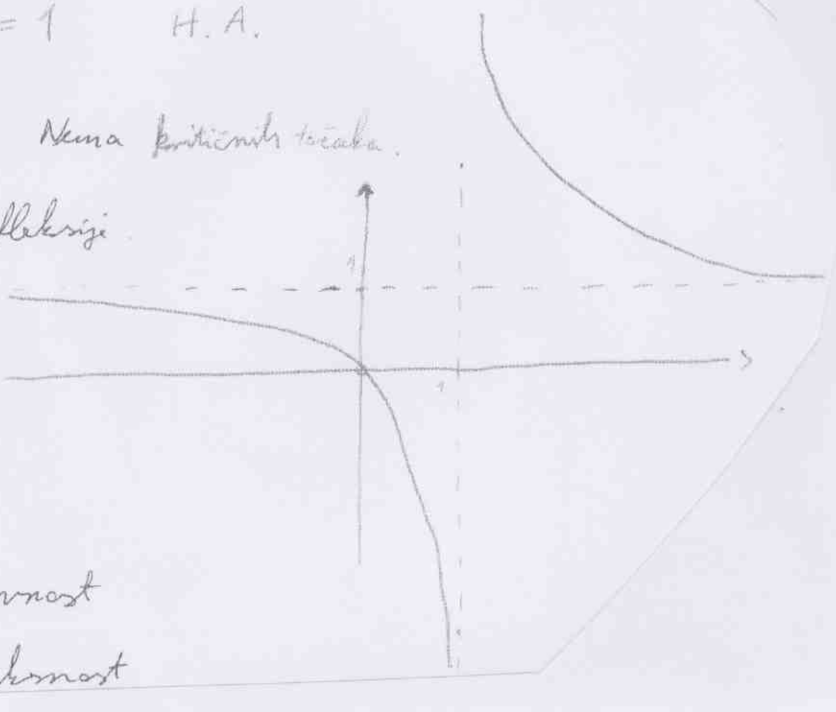
$f(0) = 0$

$f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$

$\Rightarrow$ stroga padajuća funkcija

$f''(x) > 0$ za $x > 1$ konkavnost

$f''(x) < 0$ za $x < 1$ konveksnost



Ponekad neko svojstvo na temelju kojeg određujemo tok funkcije ne možemo odrediti jer je izraz koji treba riješiti za nas prekompliciran, ali kada iz podataka koje možemo izračunati nacrtamo skicu grafa, taj graf nam pokaže svojstvo koje nismo znali izračunati akgebarski. U sljedećem primjeru ne znamo odmah izračunati nultočke funkcije, ali na osnovi grafa na kraju nam posatje jasno da funkcija nema nultočaka.

Primjer 2. Odrediti tok funkcije $f(x) = \arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)$.

1) $\left.\begin{matrix} e^{2x}>0 \\ e^{2x}+1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}>0 \Rightarrow \mathcal{D}(f)=\mathbb{R}=\langle -\infty,+\infty\rangle \qquad = \frac{e^{2x}+1-1}{e^{2x}+1} = 1-\frac{1}{e^{2x}+1}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan e^x - \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{arctan i ln su} \\ \text{NEPREKIDNE F-je} \\ \Rightarrow \lim\limits_x f(x)=f(\lim\limits_x x)\end{matrix}\right\}$

$= \arctan\left(\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) = \underbrace{\arctan(+\infty)}_{=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x} \,:e^{2x}}{e^{2x}+1 \,:e^{2x}}}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{H.A. } y=\frac{\pi}{2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1 \qquad \frac{\pi}{2}\approx 1.57$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)\right) =$

$= \arctan\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) = \arctan 0 - \frac{1}{2}\ln\underbrace{\frac{0}{0+1}}_{=\frac{0}{1}=0} = 0-\frac{1}{2}\underbrace{\ln 0}_{=-\infty} = +\infty \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{NEMA L.H.A, ALI} \\ \text{MOŽDA IMA} \\ \text{L.K.A.}\end{matrix}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\arctan e^x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)}{x}\right) = \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\arctan e^x}{x}\right)}_{=\frac{0}{-\infty}=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)}{x}\right)}_{=\frac{-\infty}{-\infty}=\text{ NEODREĐENI OBLIK}} = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

$\boxed{a=-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)}{x} = \left\{\begin{matrix}\text{L'HOPITALOVO} \\ \text{PRAVILO}\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{\cancel{e^{2x}+1}}{\cancel{e^{2x}}}\cdot\frac{2\cancel{e^{2x}}(e^{2x}+1)-\cancel{e^{2x}}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{\cancel{2}}}}{1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2e^{2x}}+2-\cancel{2e^{2x}}}{e^{2x}+1} = \frac{2}{0+1} = 2$

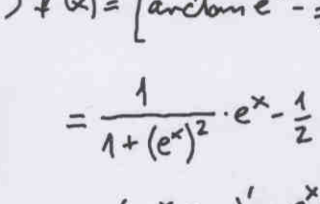
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\arctan e^x}_{\to 0} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)+1x\right) = \left\{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b\right\} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\left(\ln e^{2x}-\ln(e^{2x}+1)\right)+x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\left(2x-\ln(e^{2x}+1)\right)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cancel{-x}+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)\cancel{+x}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}+1) = \frac{1}{2}\ln(0+1) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$

$\boxed{b=0}$

L.K.A. $y=ax+b \Rightarrow$ L.K.A. $y=-x$

3) IZ ② ZAKLJUČAK



- NEOMEĐENA ODOZGO
- OMEĐENA ODOZDO
- NITI PARNA, NITI NEPARNA JER ASIMPTOTE NISU NITI ZRCALNO, NITI CENTRALNO SIMETRIČNE SLIJEVA I ZDESNA
- NIJE PERIODIČNA

④ $f(0) = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2} \approx 1.13$

ZA KOJI $f(x)=0$?

$\arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) = 0$?

$\arctan e^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$? NE ZNAM TO RIJEŠITI. MOŽDA NA KRAJU POMOGNE GRAF.

) $f'(x) = \left[\arctan e^x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)\right]' = \underbrace{\left(\arctan e^x\right)'}_{f(g(x))} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)\right)'}_{f(g(x))}$

$= \frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\cdot\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-e^{2x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{e^{2x}+1}}{\cancel{e^{2x}}}\cdot\frac{\cancel{2e^{2x}}\overbrace{\left(e^{2x}+1-e^{2x}\right)}^{=1}}{(e^{2x}+1)^{\cancel{2}}} = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow \mathcal{D}(f')=\mathbb{R}$

$f''(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\right)' = \frac{e^x\cdot(e^{2x}+1)-(e^x-1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{3x}+e^x-2e^{3x}+2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{-e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x(-e^{2x}+2e^x+1)}{(e^{2x}+1)^2}$

) KRITIČNE TOČKE:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$

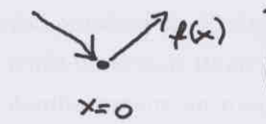
⑦ $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}>0 \Leftrightarrow e^x-1>0$

$\Leftrightarrow e^x>1$

$\left.\begin{matrix}f \text{ raste za } x>0 \\ f \text{ pada za } x<0\end{matrix}\right\} \Leftarrow \quad \Leftrightarrow x>0$

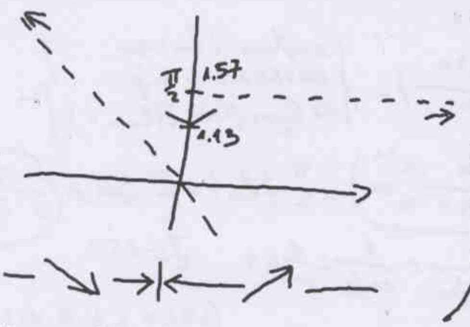
NASTAVAK $\boxed{\text{PRIMJER 2.}}$

8) U KRIT. TOČKI $x=0$ MIJENJA SE PAD F-JE U RAST F-JE.
ZBOG TOGA JE U TOJ TOČKI LOKALNI MINIMUM
TO JE TOČKA $T(0, f(0)) = T(0, 1.13)$



$\Rightarrow$ NEMA DRUGIH KRIT. TOČAKA, NITI TOČAKA NA RUBU DOMENE, STOGA NEMA DRUGIH LOKALNIH EKSTREMA

SADA ZNAMO DA JE GRAF:



9) OD RANIJE ZNAMO DA JE f OMEĐENA ODOZDO, A SADA ZNAMO DA JE NAJMANJI LOKALNI MINIMUM VRIJEDNOST OKO 1.13, PA DAKLE TOČKA $T(0, 1.13)$ JE UJEDNO I GLOBALNI MIN.
GLOBALNIH MAX. NEMA JER JE NEOMEĐENA ODOZGO.

10) $f''(x) = 0$?

$$\frac{e^x(-e^{2x}+2e^x+1)}{(e^{2x}+1)^2} = 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0}(-e^{2x}+2e^x+1) = 0$$

$$\iff \underline{-e^{2x}+2e^x+1=0}$$

$$\iff -(e^x)^2+2e^x+1=0$$

$$t=e^x \Rightarrow -t^2+2t+1=0$$

$$\iff t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-1)}}{-2} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{-2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{-2}$$

$$t_1 = 1-\sqrt{2}$$
$$t_2 = 1+\sqrt{2}$$

ODREDIMO x:

KADA JE $e^x = t_1 = 1-\sqrt{2} \approx -0.41$? NIKADA

KADA JE $e^x = t_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$? ZA $x = \ln(1+\sqrt{2}) \approx \ln(2.41) \approx 0.88$ } MOGUĆA TOČKA INFLEKSIJE

DALJE TRAŽIMO PREDZNAKE OD $f''(x) = \frac{\overset{+}{e^x}(-e^{2x}+2e^x+1)}{\underset{+}{(e^{2x}+1)^2}}$

$\Rightarrow$ PREDZNAK OD $f''(x)$ JE ISTI KAO PREDZNAK OD $-e^{2x}+2e^x+1$.

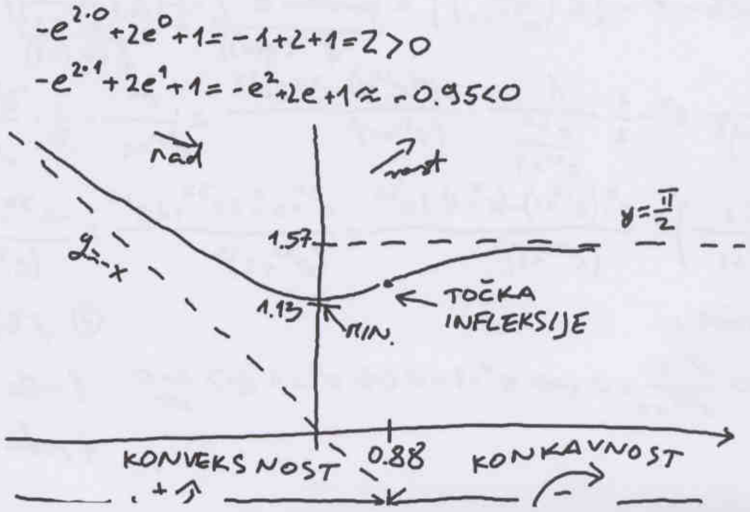
$-e^{2x}+2e^x+1$ JE NEPREKIDNA F-JA KOJA JE NULA ZA $x \approx 0.88$.

DAKLE $-e^{2x}+2e^x+1$ MOŽE MIJENJATI PREDZNAK SAMO U $x \approx 0.88$

	$-\infty$ ↓ 0.88	↓ $+\infty$
$-e^{2x}+2e^x+1$	+	−
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	∪	∩

$$-e^{2\cdot0}+2e^0+1 = -1+2+1 = 2 > 0$$
$$-e^{2\cdot1}+2e^1+1 = -e^2+2e+1 \approx -0.95 < 0$$

$\Rightarrow$ SKICA GRAFA



Primjer 3. Odrediti tok funkcije $f(x) = \dfrac{15 + 8x + x^2}{9 - x^2}$.

Vidi http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1_20090922.pdf

$f''(x) = +16(3-x)^{-3}$ za $x \neq -3$

Konkavna na $x < 3$

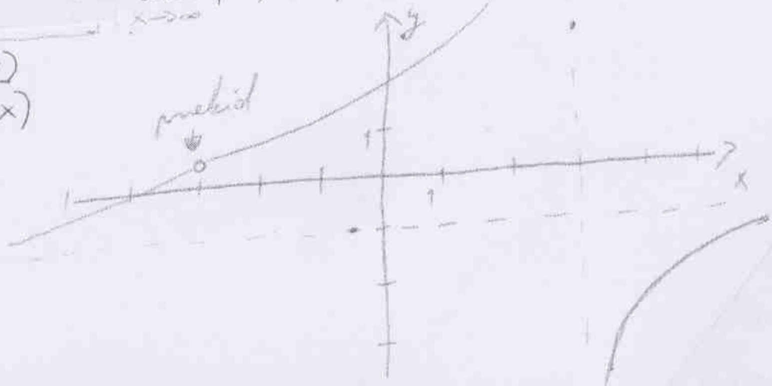
Konveksna na $x > 3$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \frac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to 3\pm} f(x) = \mp\infty$

$\Rightarrow$ $x=3$ je V.A.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ H.A.



Tijek: graf: $f(x) = \dfrac{15+8x+x^2}{9-x^2} = \dfrac{(5+x)(3+x)}{(3-x)(3+x)}$

$D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

Kada je $x \neq -3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{5+x}{3-x}$

$f'(x) = \dfrac{3-x+5+x}{(3-x)^2} = \dfrac{8}{(3-x)^2}$ za $x \neq -3$

Primjer 4. Odrediti tok funkcije $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2$. $D(f) = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2} = +\infty \Rightarrow$ NEOGRANIČENA ODOZGO NEMA D.H.A.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \Rightarrow$ NEMA D.K.A.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2} = -\infty \Rightarrow$ NEOGRANIČENA ODOZDO NEMA L.H.A.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \Rightarrow$ NEMA D.K.A.

$f(-x) = \frac{-x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 2$ $\begin{matrix} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{matrix}$ $\Rightarrow$ NITI PARNA NITI NEPARNA

NIJE PERIODIČNA

$f(0) = 2$

$f(x) = 0$ za $\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2 = 0$ NE ZNAM. ?

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$

$f''(x) = 3x - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0$ za $\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}}{3}$

$x_1 = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{19}) \approx -0.56$

$x_2 = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{19}) \approx 0.9$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(x - x_1)(x - x_2)$

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$\Rightarrow$ MAX MIN LOKALNI

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

	$-\infty$ … $x_3 = \frac{1}{6}$	$x_3 = \frac{1}{6}$ … $+\infty$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

INFLEKSIJA u $x_3 = \frac{1}{6}$

$f(x_1) = f(-0.56) \approx 2.25$

$f(x_2) = f(0.9) \approx 1.5$

$f(x_3) = f(\frac{1}{6}) \approx 1.87$

Graf ove funkcije nalazi se na prvoj strani seminara 12.

Primjer 5. Odrediti tok funkcije $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Vidi slično na http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node107.html

VIDI SEMINAR 11. PRIMJER 3.

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

H.A. $y=1$

V.A. $x=1$, $x=-1$

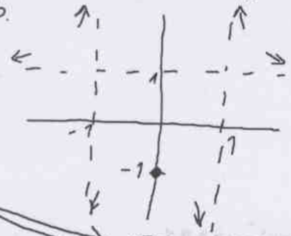
PARNA, NIJE PERIODIČNA

NEOMEĐENA

$f(0) = -1$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+1=0$ ↯

$\Rightarrow$ NEMA NULTOČAKA



$f'(x) = \left\{\begin{matrix}\text{SEMINAR 12}\\ \text{PRIMJER 4}\end{matrix}\right\} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-4(x^2-1)^{\cancel{2}} - (-4x)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}}} = \dfrac{4(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

KRITIČNE TOČKE:

$\mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$ TO NE DAJE NITI JEDNU KRIT. TOČ.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x=0$

JEDINA KRITIČNA TOČKA

MONOTONOST:

KADA JE $f'(x)>0$? $\Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -4x>0 \Leftrightarrow x<0$

DAKLE $f'(x)>0$ ZA $x<0$. TADA f RASTE.

$\Rightarrow f'(x)<0$ ZA $x>0$. -||- f PADA.

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

| ↗ | ↗ | ↘ | ↘ |

LOK. MAX.

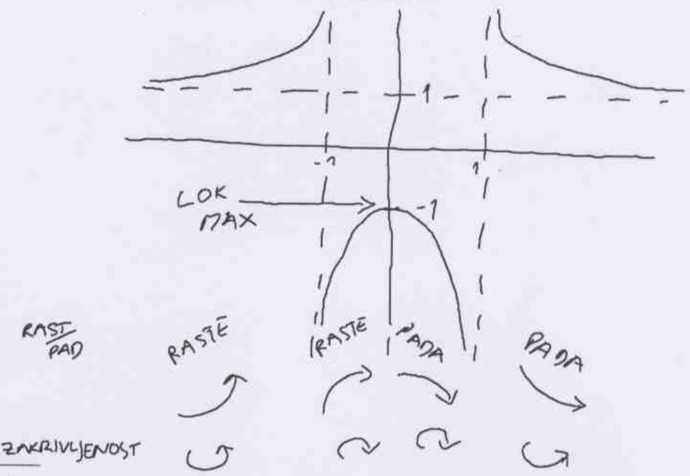
ZAKRIVLJENOST

INFLEKSIJA: $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x^2+3=0$ ↯ NEMA

PREDZNAK OD $f''(x) = \dfrac{4(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ ZAVISI OD PREDZNAKA (x^2-1)

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
x^2-1	+	−	+
$(x^2-1)^3$	+	−	+
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

SKICA GRAFA



Primjer 6. Odrediti tok funkcije $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+x}$.

Vidi slično na http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node108.html

VIDI SEMINAR 11. PRIMJER 5.

$\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [0, +\infty\rangle$

D.K.A. $y(x) = 3x+1$

L.K.A. $y(x) = x - \frac{1}{2}$

NEOMEĐENA ODOZGO I ODOZDO

NA OSTALIM RUBOVIMA DOMENE:

$f(-1) = -2 \quad f(0) = 0$

NITI PARNA, NITI NEPARNA, NITI PERIODIČNA

$f'(x) = 2 + \frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1) = 2 + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

f' JE NEPREKIDNA NA $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

DAKLE, -1 I 0 SPADAJU U KRITIČNE TOČKE JER SU U $\mathcal{D}(f)$, A NISU U $\mathcal{D}(f')$.

$f''(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\cdot\sqrt{x^2+x} - (2x+1)\cdot\frac{1}{2}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2} = \dfrac{-1}{4\sqrt{(x^2+x)^3}}$

f'' JE NEPREKIDNA NA $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

OSTALE KRITIČNE TOČKE: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2 + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = -2$

$\Leftrightarrow 2x+1 = \underbrace{-4\sqrt{x^2+x}}_{\leq 0} \Rightarrow 2x+1 \leq 0$

$\Rightarrow \boxed{x \leq -\frac{1}{2}}$ UVJET ZA DALJE

KVADRIRANJE $\Rightarrow 4x^2+4x+1 = 16x^2+16x$

$\Rightarrow 12x^2+12x-1=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-12 \pm\sqrt{144+4\cdot 12}}{24} = \dfrac{-12\pm\sqrt{192}}{24}$

$= \dfrac{-12\pm 8\sqrt{3}}{24} = \dfrac{1}{6}\left(-3\pm 2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow x_1 \simeq -1.077,\ x_2 \simeq 0.077$

ZBOG OVOG UVJETA ZADRŽAVAMO SAMO x_1.

PROVJERA: $f'(-1.077) = -0.003 \approx 0$

$f'(0.077) = 4.003 \neq 0$

MONOTONOST UMJESTO ALGEBARSKOG RJEŠAVANJA NEJEDNADŽBE $f'(x)>0$ KORISTIMO ČINJENICU DA JE f' NEPREKIDNA NA SVOJOJ DOMENI $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$ I DA JE NULA ZA $x_1 = -1.077$. ZBOG TOGA PREDZNAK OD f' JE KONSTANTAN NA $\langle -\infty, x_1\rangle$, ZATIM NA $\langle x_1, -1\rangle$ I NA $\langle 0, +\infty\rangle$. PREDZNAK NA SVAKOM OD TIH INTERVALA MOŽEMO ODREDITI IZ PREDZNAKA BILOKOJE TOČKE NA INTERVALU.

	$-\infty$ (−2) x_1	x_1 (−1.04) -1	-1 … 0	0 (1) $+\infty$
$f'(x)$	+	−	N/D	+
$f(x)$	↗	↘	N/D	↗

$f'(-2) = 0.94 > 0$

$f'(-1.04) = -0.65 < 0$

$f'(1) = 3.06 > 0$

$\Rightarrow x_1$ je LOK. MAX. $f(x_1) = f(-1.077) = -1.866$

$\Rightarrow -1$ je LOK. MIN. $f(-1) = -2$

$\Rightarrow 0$ je LOK. MAX. $f(0) = 0$

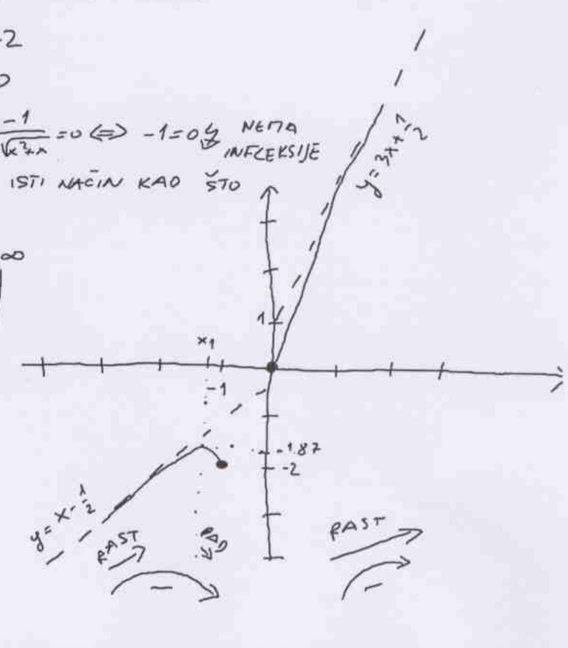
ZAKRIVLJENOST $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{4\sqrt{x^2+x}} = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$ ↯ NEMA INFLEKSIJE

PREDZNAK OD f'' ODREĐUJEMO NA ISTI NAČIN KAO ŠTO JE ODREĐEN PREDZNAK OD f'.

	$-\infty$ (−2) -1	-1 … 0	0 (1) $+\infty$
$f''(x)$	−	N/D	−
$f(x)$	∩	N/D	∩

$f''(-2) = -0.0883 < 0$

$f''(1) = -0.0883 < 0$



Primjer 7. Odrediti tok funkcije $f(x) = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$.

VIDI SEMINAR 11. PRIMJER 6.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$ $\mathcal{D}(f') = \langle -4, 4 \rangle$

$\mathcal{D}(f) = [-4, 4]$

$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} + \frac{1}{4\sqrt{(4-x)^3}}$

$f(4) \approx 2.8$, $f(-4) \approx -2.8$ } NEMA V.A. } => OGRANIČENA

NEPARNA, NIJE PERIODIČNA

KRITIČNE TOČKE: $-4 \in \mathcal{D}(f)$ $-4 \notin \mathcal{D}(f')$
$4 \in \mathcal{D}(f)$ $4 \notin \mathcal{D}(f')$

$f(0) = 0$

$f(x) = 0$ za $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} = 0$

$\sqrt{4+x} = \sqrt{4-x} \ /^2$

$\cancel{4}+x = \cancel{4}-x$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ SAMO ZA $x = 0$

JOŠ, KADA $f'(x) = 0$? ZA $\frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0$

NIKADA $\Leftarrow$ $\oplus + \oplus = 0$ ↯

$\Rightarrow$ KRITIČNE TOČKE SAMO $x = -4$, $x = 4$.

ZAKRIVLJENOST

$f''(x) = 0$ ZA $\frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} + \frac{1}{4\sqrt{(4-x)^3}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(4-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(4+x)^3}}$

$\Leftrightarrow 4-x = 4+x$

$\Leftrightarrow x = 0$

KADA $f''(x) > 0$

$\frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} + \frac{1}{4\sqrt{(4-x)^3}} > 0$

$\frac{1}{4\sqrt{(4-x)^3}} > \frac{1}{4\sqrt{(4+x)^3}} \ / \cdot 4\cdot\sqrt{(4-x)^3}\cdot\sqrt{(4+x)^3}$

$\sqrt{(4+x)^3} > \sqrt{(4-x)^3} \ /^2$

$(4+x)^3 > (4-x)^3 \ /\sqrt[3]{\ }$

$\cancel{4}+x > \cancel{4}-x \Leftrightarrow x > 0$

ZA $x > 0$ ∪

ZA $x < 0$ ∩

MONOTONOST: KADA $f'(x) \lessgtr 0$?

$f'(x) > 0$ za $\frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{4+x}} > -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

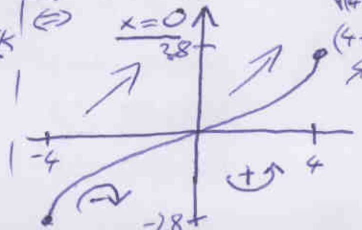
$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} > -\sqrt{4+x}$ } UVIJEK
POZ. > NEG.

$\Rightarrow$ ZA SVE $x \in \mathcal{D}(f')$ $f'(x) > 0$

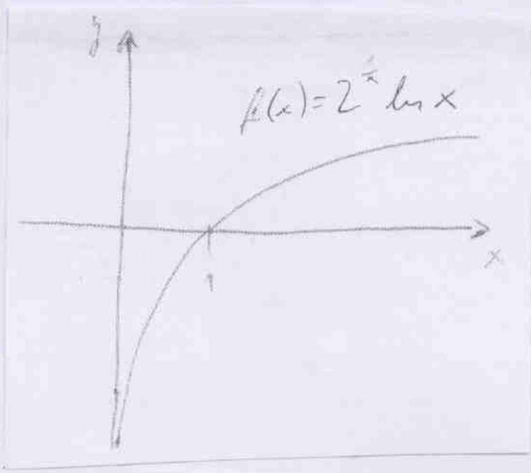
$\Rightarrow f$ RASTE

EKSTREMI: VIDI SKICU GRAFA

TOČKE NA RUBU SU LOKALNI I GLOBALNI EKSTREMI



Primjer 8. Odrediti tok funkcije $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} \ln x$. *Vidi* http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1_20090922.pdf



$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}} \ln x = [2^{\infty} \cdot (-\infty)] = -\infty$ V.A.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} \ln x = [2^0 \cdot \infty] = +\infty$ Nema H.A.

$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (2^{\frac{1}{x}} \ln x - ax) \Rightarrow a = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} \ln x}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$f'(x) = +(\ln 2) \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln x + 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{\ln 2 \ln x \, 2^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ Nema K.A.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = x\cancel{2^{\frac{1}{x}}} - \ln 2 \ln x \cancel{2^{\frac{1}{x}}} \Leftrightarrow 0 = x - \ln 2 \ln x \Leftrightarrow x = \ln 2 \ln x$

Budući $\ln 2 \in (0, 1) \Rightarrow$ Jednadžba $x = \ln 2 \ln x$ nema rješenje $\Rightarrow$ Nema K.T.

$f''(x) = (\ln 2) 2^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln 2 \ln x}{x^2}\right) + 2^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} - \ln 2 \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2^{\frac{1}{x}} \frac{(\ln 2)^2 \ln x + (2\ln 2) x (\ln x - 1)}{x^4}$

Primjer 9. Odrediti tok funkcije $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x)}$.

VIDI SEMINAR #11 PRIMJER 8.

PERIOD $p = \frac{2\pi}{3}$

PARNOST

NEOMEĐENOST ODOZGO

OMEĐENOST ODOZDO

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

V.A. ZA SVAKI $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f'(x) = \left[(\cos(3x))^{-2}\right]' = -2 \cdot \frac{1}{\cos^3(3x)} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = 6\,\frac{\sin(3x)}{\cos^3(3x)} = \frac{6\tan(3x)}{\cos^2(3x)}$$

$$f''(x) = 6 \cdot \frac{3\cos^2(3x) + 9\sin^2(3x)}{\cos^4(3x)} > 0 \Rightarrow \boxed{f \ (+)}$$

KRITIČNE TOČKE $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(3x) = 0$

$\tan x = 0$ ZA $x = k\pi \Rightarrow \tan(3x) = 0$ ZA $3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\tan(x) > 0$ ZA $x \in \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle \Rightarrow \tan(3x) > 0$ ZA $3x \in \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle \Rightarrow x \in \langle \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \rangle$

$f'(x) > 0$ ZA $\tan(3x) > 0$ JER JE SVE OSTALO POZITIVNO.

$f'(x) > 0$ ZA $\langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ NA OSNOVNOM PERIODU

f RASTE ZA — // —, A PADA NA OSTALOM DIJELU

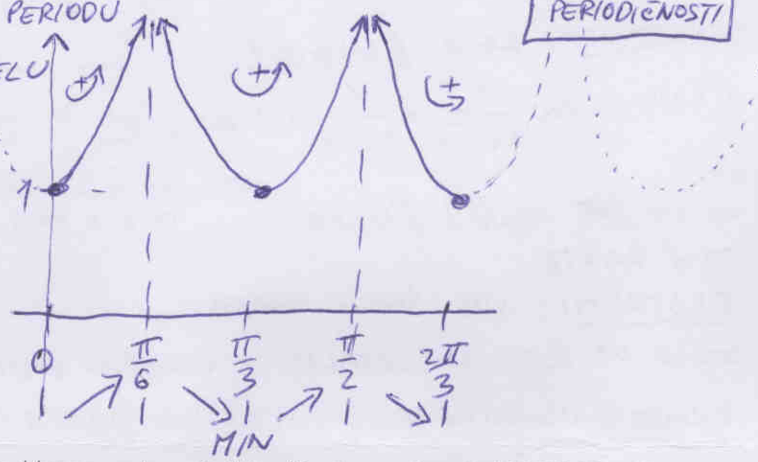
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \notin \mathcal{D}(f) \Rightarrow$ SAMO $0, \frac{\pi}{3}$ LOK. EKSTREMI MINIMUMI

$f(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{1}{1^2} = 1$

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos^2(\pi)} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

ZAKRIVLJENOST SVUGDJE (+)

KONVEKSNOST



Primjer 10. Odrediti tok funkcije $f(x) = e^x \tan x$.

Vidi `http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1_20090922.pdf`

SKICA GRAFA NA SLJEDEĆOJ STRANI

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ V.A. u točkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \left[e^{\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+)}{\cos(\frac{\pi}{2}+)} = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{0_-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (e^x \tan x) = \lim_{x\to\infty} \left(e^x \frac{\sin x}{\cos x}\right)$ nije definiran jer za proizvoljno velik $k \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \pm\infty$, $f(k\pi) = 0$

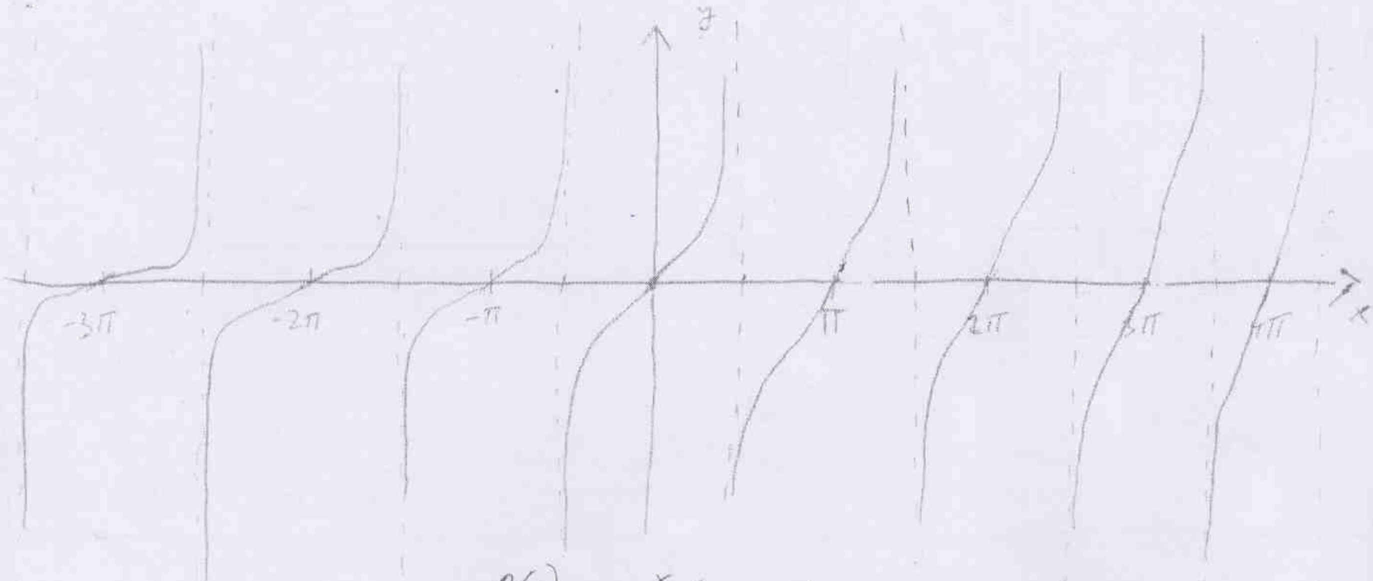
$f'(x) = e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) = e^x \left(\frac{1 + \sin x \cos x}{\cos^2 x} \right) > 0 \ \forall x$ Nema kritičnih točaka. Svugdje rastuća!

$$f''(x) = e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \right) = e^x \left(\frac{\sin x \cos^2 x + 2\cos x + 2\sin x}{\cos^3 x} \right)$$

Točke infleksije je teško odrediti precizno, ali postoji jedna na $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, k\pi\right)$, k

Primjer 11. Odrediti tok funkcije $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x^2-1}}$. *Vidi* `http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node109.html`

NA SLJEDEĆOJ STRANI.



$f(x) = e^x \tan x$

Primjer 12. Odrediti tok funkcije $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. *Vidi* `http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1_20090907.pdf`

$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

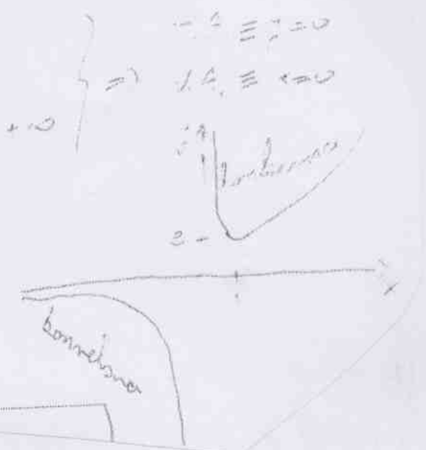
$\lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$f(1) = e$

$f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f''(x) = \dfrac{e^x(x-1+1)x^2 - e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} \Rightarrow$ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$



Ako ostane vremena određivati ćemo tok funkcija koje su bile zadane na pismenim ispitima u toku protekle godine...

PRIMJER 11. $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-1}}$.

Rješenje. Područje definicije funkcije f je $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. Stoga funkcija može imati vertikalne asimptote samo u točkama $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Provjerimo prvo točku x_1. Prema zadatku (4.8) je

$$\lim_{x\to -1+} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -1^-} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = -\infty,$$

odakle slijedi da je pravac $x = -1$ vertikalna asimptota funkcije f s lijeve strane. Na isti način za točku x_2 dobivamo

$$\lim_{x\to 1^+} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^-} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$$

pa je pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota funkcije f s desne strane.

Nadalje, zbog

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty,$$

funkcija f nema horizontalnu asimptotu ni u lijevoj ni u desnoj strani.

Potražimo kose asimptote. Ako koeficijent smjera kose asimptote označimo s k, tada je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2-1}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1.$$

Za odsječak na x osi, l, vrijedi

$$l = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[e^{\frac{1}{x^2-1}} - 1\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2-1} = t \\ x \to \pm\infty \\ t \to 0+ \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \sqrt{1+\frac{1}{t}} \cdot (e^t - 1) = \lim_{t\to 0+} \sqrt{1+\frac{1}{t}} \cdot \frac{e^t-1}{t} \cdot t$$

$$= \lim_{t\to 0+} \sqrt{1+\frac{1}{t}} \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{t} \cdot \lim_{t\to 0+} t = 1 \cdot e \cdot 0 = 0.$$

$\Rightarrow y = kx + l \Rightarrow y = x$ JE D.K.A. I L.K.A.

VIDI SEMINAR 11. PRIMJER 10. NEPARNOST

DERIVACIJE

$$f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x^2-1}}\right)' = x' \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} + x \cdot \left(e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)' = (*)$$

$$\underbrace{\left(e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)'}_{(f(g(x)))'} = \left\{\begin{matrix} g(x) = \frac{1}{x^2-1}, & g'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \\ f(x) = e^x, & f'(x) = e^x \end{matrix}\right\} = \underbrace{e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2}}_{f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$\Rightarrow (*) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} + x \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{-2}{(x^2-1)^2} = e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \left(\frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2}\right) = f'(x)$$

$f''(x) =$ PREVIŠE POSLA

NADAMO SE DA ĆEMO USPJETI NAPRAVITI DOBRU SKICU GRAFA BEZ ZAKRIVLJENOSTI.

KRITIČNE TOČKE:

$f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{1}{x^2-1}}}_{>0} \cdot \frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = 0, \quad x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2-\sqrt{3}} = -0.52$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0.52$

$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} = -1.93$

$\Rightarrow x_4 = \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1.93$

MONOTONOST ODREĐUJEMO NA OSNOVU NEPREKIDNOSTI TESTIRAJUĆI PREDZNAK f' U POJEDINIM TOČKAMA

	$-\infty$ … -1.93	-1.93 … -1	-1 … -0.52	-0.52 … 0.52	0.52 … 1	1 … 1.93	1.93 … $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘	↘	↗

$f'(-2) = 0.15 > 0 \quad f'(2) = 0.15$

$f'(-1.5) = -4.2 < 0 \quad f'(1.5) = 4.2$

$f'(-0.7) = -0.4 < 0 \quad f'(0.7) = 0.4$

$f'(0) = 0.4 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{LOK. MINIMUMI U } x_1 = -0.52,\ x_4 = 1.93 \\ \text{LOK. MAKSIMUMI U } x_2 = 0.52,\ x_3 = -1.93 \end{cases}$$

$f(x_1) = -0.13 \quad f(x_2) = 0.13$

$f(x_3) = -2.78 \quad f(x_4) = 2.78$

GLOBALNIH EKSTREMA NEMA

SKICA GRAFA