Jednostavniji redovi

Osnove o redovima trebale bi biti u vašem predznanju. Sada donosimo kriterije za konvergenciju redova. Donosimo nekoliko jednostavnijih redova.

Geometrijski red. Općenito vrijedi: $\sum q^n = \dfrac{1}{1-q}$ za $q \in \langle -1, 1\rangle$.

Primjer (4) Izračunaj sumu reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left\{ q = -\frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Primjer (5) Izračunaj sumu reda $\sum\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Harmonijski red. Primjer (6) Red $\sum \frac{1}{n}$ divergira. Vidi Primjer 3.2.11 iz knjige i 113 iz dodatka 6.

Budući da je općenito računanje beskonačne sume zahtjevno usredotočiti ćemo napore samo na pitanje konvergenicje ili divergencije bez ispitivanja sume. Pri tome koristimo razne kriterije (teoreme).

Poredbeni kriterij. Neka su zadana dva reda s pozitivnim članovima. Ako red s manjim članovima divergira tada divergira i veći. Ako veći red s većim članovima konvergira tada konvergira i manji.

Primjer (7) Odrediti konvergenciju reda $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. $= \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ uspoređujemo sa $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira

AKO DIVERGIRA RED S MANJIM ČLANOVIMA TADA DIVERGIRA I ONAJ S VEĆIM. DA LI JE $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{n} \iff \underset{n^1}{n} \geq n^{\frac{2}{3}}$? ZA POZITIVNE n JEST $n^1 \geq n^{\frac{2}{3}}$ ZATO JER SU BAZE ISTE, A POTENCIJA $1 \geq \frac{2}{3}$.

ZBOG $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ DIVERGIRA.

Limesni poredbeni kriterij. Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in \langle 0, \infty\rangle$. Tada se redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ isto ponašaju u ~~smilsu~~ SMISLU konvergencije. (Usporedi Teorem 3.2.13 iz knjige)

Primjer (8) Istraži konvergenciju $\sum \dfrac{3}{2^n+5}$. USPOREĐUJEMO SA $\sum \frac{3}{2^n} = 3\sum\frac{1}{2^n} = 3\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ A, TO JE GEOMETRIJSKI RED (KONVERGIRA

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^n+5}}{\frac{3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3}\cdot 2^n}{\cancel{3}\cdot(2^n+5)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n : 2^n}{(2^n+5):2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{2^n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

PREMA LIMESNOM POREDBENOM KRITERIJU $\sum\frac{3}{2^n+5}$ SE PONAŠA KAO $\sum\frac{3}{2^n}$, PA KONVERGIR

Primjer (9) Istraži konvergenciju $\sum \dfrac{n}{2n^2+5n-1}$. USPOREĐUJEMO SA $\sum\frac{1}{n}$, KOJI DIVERGIRA

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2n^2+5n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 \;:n^2}{2n^2+5n-1\;:n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

PREMA LIMESNOM POREDBENOM KRITERIJU $\sum\frac{n}{2n^2+5n-1}$ se PONAŠA ISTO KAO $\sum\frac{1}{n}$, DAKLE DIVERGIRA.

Kriteriji za konvergenciju reda

Nužan uvjet za konvergenciju reda: ako red $\sum a_n$ konvergira onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ekvivalentno, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ tada red divergira.

Teorem 3.2.14 iz knjige donosi kriterije za konvergenciju redova koji nose imena po istaknutim matematičarima:

D'Alambert

Neka je red $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n \text{ konvergira}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum a_n \text{ divergira}$$

Cauchy

Neka je red $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tada[1]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum a_n \text{ konvergira}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum a_n \text{ divergira}$$

Raabe

Neka je red $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ tada

Pazi! ovaj kriterij je obrnuti.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1 \implies \sum a_n \text{ divergira}$$
$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 \implies \sum a_n \text{ konvergira}$$

U prethodnim kriterijima spominju se samo nizovi s pozitivnim članovima. To međutim nije ograničenje zbog Teorema 3.2.15 iz knjige.

Apsolutna konvergencija reda $\sum a_n$ označava da red $\sum |a_n|$ konvergira.

Teorem 3.2.15 iz knjige:

Ako realni red apsolutno konvergira onda i konvergira.

Za alternirane redove koristimo sljedeći kriterij (usporedi knjigu)

Leibnitz

Neka je $a_{n+1} \leq a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ tada alternirani red $\sum (-1)^n a_n$ konvergira.

Primjer (10) Odrediti konvergenciju reda $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

PRVO PROVJERIMO NUŽAN UVJET : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$

PREMA NUŽNOM UVJETU OVAJ RED DIVERGIRA.

[1]Koristimo sljedeća svojstva $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{konstanta}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{polinom}} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\text{polinom}_1}{\text{polinom}_2}} = 1$.

Kako istražiti konvergenciju?

- ako je red alternirajući $\longrightarrow$ provjeri Leibnitzov kriterij
- inače:
  - provjeri nužan uvjet konvergencije
  - provjeri redom kriterije D'Alambert, Cauchy i Raabe

Važno!

PREDZNACI ALTERNIRAJU

Primjer (11) Odrediti konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. $= -\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

PROVJERAVAMO LEIBNITZOV KRITERIJ: $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} \le \sqrt[3]{n+1}$ ISTINA, JER JE $\sqrt[3]{\ }$ RASTUĆA F-JA.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$ PREMA LEIBNITZOVOM KRITERIJU RED KONVERGIRA

Primjer (12) Odrediti konvergenciju reda $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. OVO JE LAKO POREDBENIM KRITERIJEM. VIDI PRIMJER 7.

AKO SE NISMO SJETILI TOGA POKUŠAVAMO:

NUŽNI: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 \Rightarrow$ NE MOŽEMO NIŠTA ZAKLJUČITI

D'ALAMBERT: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1 \Rightarrow$ NE MOŽEMO NIŠTA ZAKLJUČITI

CAUCHY: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right\} = \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow$ NE MOŽE SE NIŠTA ZAKLJUČITI

RAABE: $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)}{\sqrt[3]{n+1}}}_{\frac{\infty(\infty-\infty)}{\infty}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} =$

$\Rightarrow$ RACIONALIZACIJA $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\sqrt[3]{n+1}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}\right)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{DIJELJENJE BROJNIKA I NAZIVNIKA SA } n}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1}\right)} = \frac{1}{1(1+1+1)} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ RED DIVERGIRA

Primjer (13) Odrediti konvergenciju reda $\sum \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

NUŽAN: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)\cdot\frac{n}{-(n+2)}} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)}\right)^{\lim -\frac{n}{n+2}} = e^{-1}$

$\Rightarrow$ RED DIVERGIRA

Primjer (14) Odrediti konvergenciju reda $\sum n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

NUŽAN UVJET: $\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)}_{=\infty(\infty-\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\cancel{n}+1-\cancel{n}+1)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}}_{=\frac{\infty}{\infty}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} = +\infty$

$\Rightarrow$ RED DIVERGIRA

Primjer (15) Odrediti konvergenciju reda $\sum(-1)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1-1}_{=0}+1}_{=1}-1}_{=0}+1}_{=1}-1+\ldots$

PARCIJALNE SUME

ČINE NIZ $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$

NIZ PARCIJALNIH SUMA IMA 2 GOMILIŠTA, DAKLE NE KONVERGIRA. $\Rightarrow$ RED DIVERGIRA

Primjer (16) Odrediti konvergenciju reda $\sum \frac{n!}{2^n}$ i $\sum \frac{n!}{n^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac12\cdot1\cdot\frac32\cdot2}_{=\frac32>1}\cdot\underbrace{\ldots\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac n2}_{\text{SVAKI OD OVIH FAKTORA VEĆI OD 1}}>1>0\Rightarrow \text{RED DIVERGIRA}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac1n\cdot\underbrace{\frac2n\cdot\frac3n\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac nn}_{\text{UMNOŽAK FAKTORA MANJIH OD JEDAN JE MANJI OD JEDAN}}\le\lim_{n\to\infty}\frac1n=0$$

NUŽAN UVJET NE DAJE NIKAKAV ZAKLJUČAK

D'ALOMBERT:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}}_{\to e}\Bigg)^{\lim\frac{-n}{n+1}\to(\ldots}=e\ldots$$

$\Rightarrow$ RED KONVERGIRA

Primjer (17) Odrediti konvergenciju reda $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

NUŽAN UVJET: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ {VIDI L'HOPITALOVO PRAVILO. SEMINAR 12} $=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2^n\ln2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n(\ln2)^2}=\frac{2}{\infty}=0$

D'ALAMBERT:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot\cancel{2^n}\,1}{n^2\cdot\cancel{2^{n+1}}\,2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2\cdot2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1):n^2}{2n^2:n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac2n+\frac{1}{n^2}}{2}=\frac12<1\Rightarrow \text{RED KONVERGIRA}$$

Primjer (18) Odrediti konvergenciju reda $\sum\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

NUŽAN UVJET:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}_{\to e}{}^{\underbrace{\boxed{\frac{-2}{n+1}\cdot n^2}}_{\to-\infty}}=e^{-\infty}=0$$

VIDI EXPONENCIJALNU FUNKCIJU NA LIJEVOM KRAJ

D'ALAMERT: $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}}=$ IZGLEDA KOMPLICIRANO

CAUCHY:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}_{\to e}{}^{\underbrace{\boxed{\frac{-2}{n+1}\cdot n}}_{\to-2}}=e^{-2}<1$$

$\Rightarrow$ RED KONVERGIRA

Pokušajte samostalno riješiti neke od zadataka iz dodatka 6!