Sveučilište u Zadru
Pomorski odjel

.

Matematika 2

.

Seminarska vježbenica
Priredio: mr. sc. Mate Kosor

Ime i prezime studenta: ....

.
.
.

Student sljedećim potpisom potvrđuje da je ovu vježbenicu zajedno sa priloženim rješenjima zadataka popunio vlastitom rukom i u sljedećim terminima podnio na ovjeru nastavniku, a nastavnik ovjerava da kvaliteta zadovoljava uvjet za potpis:

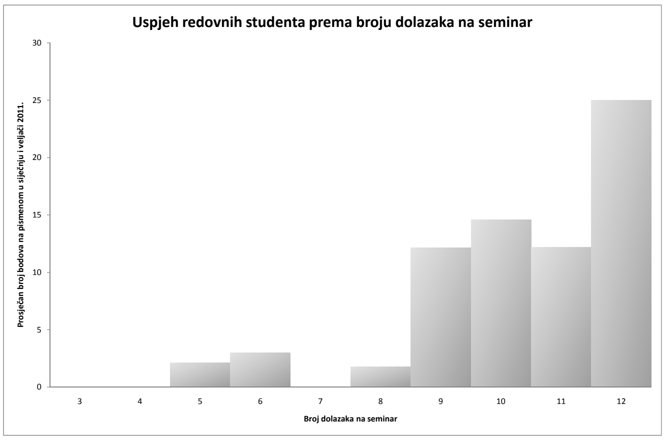
.

Popunjava student			Popunjava nastavnik	
Podneseno	Datum	Potpis	Zadovoljava	Ovjera
1. puta			DA NE	
ispravak			DA NE	
2. puta			DA NE	
ispravak			DA NE	

Važne obavijesti za studente Matematike 2

Sve obavijesti vezane za predmet nalaziti će se na `http://personal.unizd.hr/~makosor/mat2.html`, a sve ostale informacije i materijali na moodle stranici `https://moodle.carnet.hr/course/view.php?id=1170`. Udžbenik je knjiga profesora Nikice Uglešića, "Viša matematika".

Za sve studente dolasci na seminare i predavanja ovaj semestar nisu obavezni. Oni studenti koji dolaze na seminar moraju uza se posjedovati seminarsku vježbenicu, pisaći pribor i kalkulator. Bez ovoga ne mogu prisustvovati seminarima.



Sa strane su grafički sažeti podaci o uspješnosti studenata iz predmeta "Matematika 1" na način da su studenti grupirani u grupe prema broju dolazaka na seminare i za svaku grupu je visinom stupca iskazan prosječan broj bodova su studenti unutar te grupe ostvarili na pismenom ispitu. Može se zaključiti, barem za redovite studente, da oni koji su dolazili na seminare imaju značajno veće izglede za prolazak od ostalih. Za izvanredne studente nije vođena evidencija dolazaka na nastavu, ali za vjerovati je da bi analiza i za tu grupu studenata dala sličan rezultat. Svim studentima koji žele uspješno savladati ovaj predmet prethodno istaknuti podaci trebali bi biti dovoljna motivacija za dolazak na nastavu.

Seminarska vježbenica dostupna je na gore istaknutim web stranicama predmeta i sadrži gotovo sve što će se obrađivati na seminarima tokom semestra. Seminarska vježbenica treba biti otisnuta jednostrano. Na taj način kod listanja vježbenice desna strana će uvijek biti otisnuta, a lijeva prazna. Uz primjere i zadatke u ostavljenim praznim mjestima pišite rješenja. Kada nema dovoljno mjesta na desnoj stranici, zadatak ili primjer trebate riješavati na lijevoj stranici, a to je stražna strana prethodnog lista papira. Ponekad će biti potrebno umetnuti jedan ili više listova praznog bijelog papira na kojima će te riješavati zadatke ostavljene za samostalnu vježbu. Numerirajte stranice u gornjem desnom kutu.

Izvanredni studenti za potpis ne trebaju ispuniti nikakve uvjete.

Redovni studenti kao uvjet za potpis trebaju popuniti seminarsku vježbenicu, odnosno riješiti barem 95% zadataka iz vježbenice. Studenti smiju raditi zajedno. Riješiti znači da u vježbenici treba biti naveden postupak i točno rješenje. Pritom se u ukupan broj ne računaju primjeri i zadaci koji su već riješeni u tisku, već samo neriješeni primjeri i zadaci, uključujući zadatke ostavljene za samostalnu vježbu. Rješenja trebaju biti pisana vlastitom rukom, čitko i uredno. Čitko znači da asistent i drugi studenti mogu razumijeti što piše, a uredno znači da se asistent i drugi studenti koji uzmu u ruke vježbenicu mogu u kratkom roku snaći gdje je rješenje svakog pojedinog zadatka. Studenti vježbenice podnose na uvid asistentu u dva navrata: sredinom semestra i na kraju semestra (o točnim terminima biti ćete obaviješteni naknadno). Ukoliko je vježbenica popunjena u skladu s prethodno iznesenim standardom nastavnik je ovjerava, a ukoliko nije vraća je studentu s napomenom što treba ispraviti. Student ima samo jednu mogućnost ispravka. Asistent na kraju semestra podnosi nositelju kolegija listu s imenima studenata koji su ispunili uvjet za potpis.

Pojedini djelovi vježbenice predviđeni za riješavanje na nastavi biti će riješeni i dostupni na moodle stranici predmeta.

Moodle stranica predmeta zahtjeva prijavu korištenjem AAI korisničkim računom. Možete ga dobiti u studentskoj službi.

Na moodle stranici predmeta uz ostalo nalazit će se provjere znanja. Riješene provjere znanja upućuju da student uspješno savladava gradivo. Takav student trebao bi bez dodatnih napora na kraju semestra biti u stanju položiti pismeni dio ispita. Za studente koji budu rješavali moodle provjere znanja biti će na kraju semestra omogućen pristup kolokviju. Položeni kolokvij će vrijediti kao položeni pismeni ispit na prvom ispitnom roku na koji se student prijavi do kraja akademske godine. Pravilo je da se Matematike 2 ne može polagati prije Matematike 1. Zbog toga je mogućnost da kolokviraju ovaj predmet značajna upravo za studente koji još nisu položili predmet Matematika 1. Ako uspiju kolokvirati tada na sljedećem roku nakon što polože Matematiku 1 mogu ići direktno na usmeni.

Svaka moodle provjera znanja moći će se pokrenuti samo jednom, međutim pojedine provjere imati će i mogućnost ispravka. Na primjer, prvi mogući pokušaj polaganja provjere P1 označen je oznakom P1A i omogućen je samo jednom, a drugi mogući pokušaj polaganja iste provjere označen je P1B i također je omogućen samo jednom. Dovoljno je položiti provjeru P1 samo jednom, dakle bilo P1A ili P1B. Nadalje, predviđeno je da student nakon savladavanja nekoliko provjera vezanih uz jednu pojedinu temu ili seminar nakon toga polaže jednu zbirnu provjeru koja još jednom provjerava znanje iz nekoliko manjih provjera. Ove zbirne provjere označene su slovima R i S. Na zbirne provjere mogu pristupiti samo studenti koji su dovoljno dobro riješili manje provjere. Na primjer, pristup na zbirnu provjeru R1 imaju samo studenti koji su uspješno riješili barem 3 od 4 provjere P1, P2, P3 i P4. Prilikom polaganja svake provjere biti će vam navedeno koliko je bodova potrebno prikupiti za prolazak. Uglavnom će granica za prolazak provjere biti oko 60-65% bodova. Pokretanje provjere biti će moguće samo od petka u 14 do subote u 18 sati, prema rasporedu koji je donesen u tablici na sljedećoj strani. Moodle provjere znanja studenti su obvezni rješavati samostalno, bez pomoći drugih studenata. Studenti koji nemaju pristup internetu kod kuće mogu riješavati provjere u prostorijama Sveučilišne knjižnice, mogu se učlaniti u Gradsku knjižnicu Zadar odakle mogu pristupati internetu ili mogu pristupati internetu iz nekog internet caffea.

Plan rada po tjednima

TJEDAN	MJESEC	P	U	S	Č	P	S	N	Teme sa seminara i online provjera znanja
1	VELJAČA	21	22	23	24	25	**26**	**27**	Taylorov red. Aproksimacija površine konačnim sumama.
2		28	1	2	3	4	**5**	**6**	Primitivna funkcija. Određeni integral. Nepravi integral.
3	OŽUJAK	7	8	9	10	11	**12**	**13**	Integriranje parcijalnom integracijom i supstitucijom.
4		14	15	16	17	18	**19**	**20**	Računanje površine integriranjem, podjela na dijelove.
5		21	22	23	24	**25**	**26**	**27**	Integrali racionalne funkcije.
6		28	29	30	31	1	**2**	**3**	Integral kompozicije racionalne s trigonometrijskom.
7	TRAVANJ	4	5	6	7	8	**9**	**10**	Integral koji uključuje korijen i drugi binomni integrali. Primjene.
8		11	12	13	14	15	**16**	**17**	Skalarna funkcija i crtanje grafa.
9		18	19	20	21	22	**23**	**24**	Parcijalna derivacija. Više derivacije.
10		**25**	26	27	28	29	**30**	**1**	Određivanje lokalnih ekstrema skalarne funkcije
11	SVIBANJ	2	3	4	5	6	**7**	**8**	Diferencijalne jednadžbe. Separacija varijabli.
12		9	10	11	12	13	**14**	**15**	Homogena jednadžba. Linearna jednadžba.
13		16	17	18	19	20	**21**	**22**	Diferencijalne jednadžbe drugog reda. Homogena.
14		23	24	25	26	27	**28**	**29**	Nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda.
15		30	31	1	2	3	**4**	**5**	Kolokvij

Svaka moodle provjera otvorena je jednom od petka u 14 do subote u 18 sati po tjednima

1	P1A
2	P1B, P2A
3	P2B, P3A
4	P3B, P4A
5	R1 uvjet 3 od P1-P4; P5
6	P6A
7	P6B, P7
8	R2A uvjet 2 od P5-P7; P8
9	R2B uvjet 2 od P5-P7; P9A
10	P9B, P10
11	R3 uvjet 2 od P8-P10; P11A
12	P11B, P12
13	S1 uvjet 2 od R1-R3; P13
14	R4 uvjet 2 od P11-P13
15	K --> Kolokvij uvjet 2 od S1, R3 i R4

Sadržaj

Poglavlje 1

Integriranje

Zbrajanje

Konačno zbrajanje i znak $\sum$

$$\sum_{n=1}^{6} n^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{6} n^2 = \displaystyle\sum_{1\le n\le 6} n^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{5} k! =$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Neka je $f(x) = \sin(x)$. Računaj:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} f\left(\frac{k\pi}{3}\right) =$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} f'\left(\frac{k\pi}{3}\right) =$

Beskonačan zbroj (redovi realnih brojeva —knjiga str. 123)

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n} =$$

$$\sum_{k} 3^{-k} =$$

Funkcijski red — $\sum f_n$ (knjiga str. 131)

Napiši 4. parcijalnu sumu izraza: $\displaystyle\sum_{n\in N} x^{-n}$

Ovdje je $f_n(x) = x^{-n}$ i $\sum f_n = \sum x^{-n}$.

Napiši 5. parcijalnu sumu izraza: $\displaystyle\sum_{n\in N} \sin^{(n)} x$

$f^{(n)}(x)$ je n-ta derivacija funkcije $f(x)$.

Taylorov red

Teorem 4.1.13 *(str. 169)* Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ ima na intervalu $I \subseteq X$ sve derivacije $(f|_I)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je $x_0 \in I$ bilo koja točka. Tada je, za svaki $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Izračunati Taylorov red funkcije $f(x) = x^4$ oko točke $x_0 = 1$.

Razviti funkciju $f(x) = \ln(2x)$ u Taylorov red po potencijama od $x - 1$. Izračunati barem prva 4 člana.

Zadatak sa roka 24.9.2009.

Razviti funkciju $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$ u Taylorov red po potencijama od x. Izračunati barem prva 3 člana.

Taylorov red oko točke $x_0 = 0$ naziva se još i Maclaurinov red.

Razviti funkciju $f(x) = \frac{x}{x-1}$ u Taylorov red po potencijama $x + 1$. Izraèunati barem prva 4 èlana.

Zadatak s roka 8.9.2009.

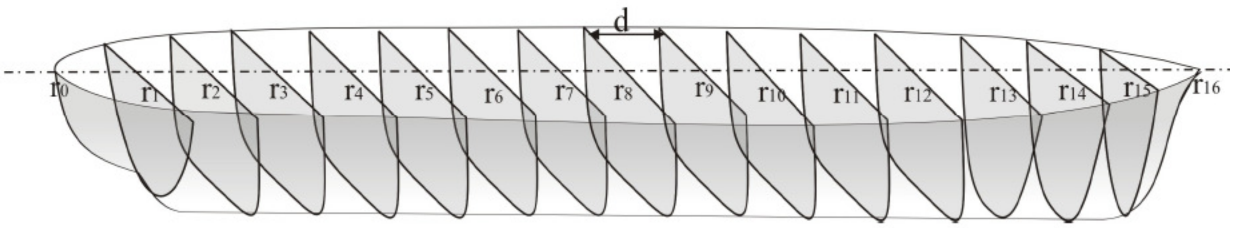
Razviti funkciju $f(x) = \cos x$ u Taylorov red po potencijama $x - \frac{\pi}{2}$. Izračunati barem prva 4 člana.

Zadatak s roka 8.9.2009.

Metode računanja volumena i površine aproksimacijom

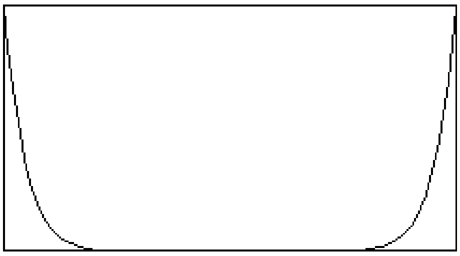
Primjer iz stručne prakse: deplasman broda

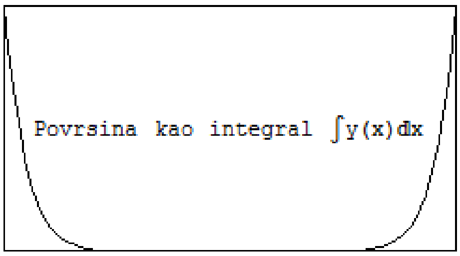
Primjer izračunavanja volumena metodom površine rebara (poprečnih vertikalnih ravnia) pojašnjava slijedeća slika. Dužina broda se podijeli na parni broj jednakih razmaka i izračuna površina rebara na tim razmacima.



Računanje deplasmana broda može se svesti na računanje površine rebara. Pokušajmo izračunati površinu rebra do vodene linije, koje odgovara formuli $v(x) = 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$, $x \in [-10, 10]$, gdje je v visina rebra od najniže točke u metrima, a x koordinata širine u metrima. Visina do vodene linije je 12 metara, a širina rebara 20 metara. Skica slijedi

Profil glavnog rebra kao $y(x)=x^{10}$





Aproksimacija površine pravokutnicima

Pokušavamo približno izraziti profil glavnog rebra kao uniju n vertikalnih stupaca — pravokutnika. Udaljenost od visine rebra $v(x)$ do visine vodene linije 12 odgovara funkciji $y(x) = 12 - v(x) = 12 - 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$. Ako aproksimiramo profil glavnog rebra sa $n = 10$ jednostavnijih oblika (npr. pravokutnika) tada nas zanima vrijednost funkcije $y(x)$ u 11 točaka ($x \in [-10, 10]$). To se naziva diskretizacija funkcije $y(x)$ na segmentu $[-10, 10]$ sa $10 + 1$ točaka. U sljedećoj tablici treba popuniti vrijednosti y_k koje nedostaju, a računaju se po formuli $y_k = y(x_k)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
y_k	0.00				12.00	12.00	12.00	12.00			0.00

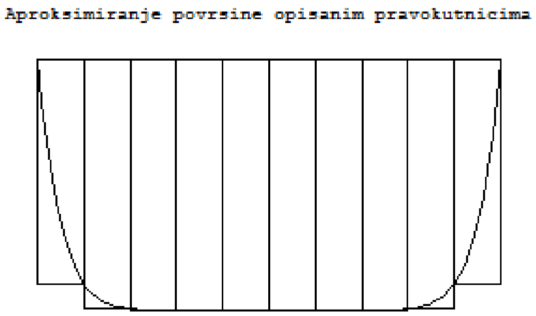
Ako aproksimiramo profil glavnog rebra sa $n = 210$ jednostavnijih oblika (npr. pravokutnika) tada nas zanima vrijednost funkcije $y(x)$ u 21 točaka sa segmenta $x \in [-10, 10]$. To se naziva diskretizacija funkcije $y(x)$ na segmentu $[-10, 10]$ sa $20 + 1$ točaka. U sljedećoj tablici upisana je takva diskretizacija:

k	0	1	2	3	4	5	6	...	14	15	16	17	18	19	20
x_k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	...	4	5	6	7	8	9	10
y_k	0.00	7.83	10.71	11.66	11.93	11.99	12.00	...	12.00	11.99	11.93	11.66	10.71	7.83	0.00

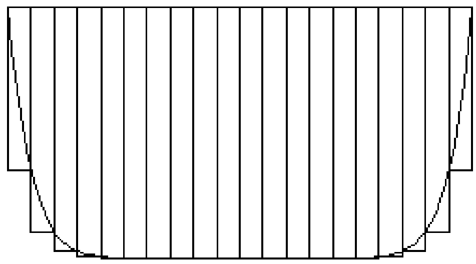
Segment $[-10, 10]$ na kojem diskretiziramo funkciju je duljine 20. Zbog toga je razmak između dvije točke diskretizacije $\triangle x = x_{k+1} - x_k = \frac{20}{n}$.

Aproksimacija površine opisanim pravokutnicima: $P \approx \triangle x \cdot \sum_{k=1}^{n} \max\{y_{k-1},\, y_k\}$

U sljedećim primjerima aproksimiramo površinu glavnog rebra opisanim pravokutnicima. Tako dobivena aproksimacija površine glavnog rebra je veća od površine glavnog rebra, ali kako uzimamo sve veći broj točaka diskretizacije tako je aproksimacija sve točnija. Za zadani n izračunati aproksimaciju površine prema formuli iz podnaslova:



$n = 10$, $\triangle x = \frac{20}{10} = 2$,
$P \approx$

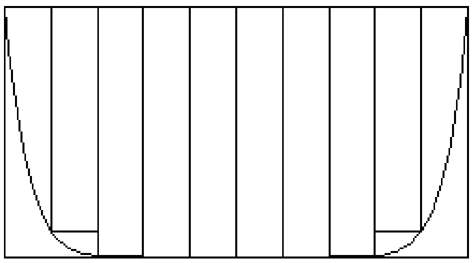


$n = 20$, $\triangle x = \frac{20}{20} = 1$,
$P \approx$

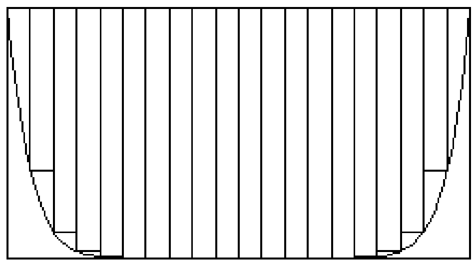
Aproksimacija površine upisanim pravokutnicima: $P \approx \triangle x \cdot \sum_{k=1}^{n} \min\{y_{k-1},\, y_k\}$

U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine upisanim pravokutnicima, koja će ispasti manja od površine glavnog rebra, ali što je veći broj točaka diskretizacije n time je i dobivena aproksimacija preciznija. Korisimo formulu iz podnaslova.

Aproksimiranje povrsine upisanim pravokutnicima



$n = 10$, $\triangle x = 2$,
$P \approx$

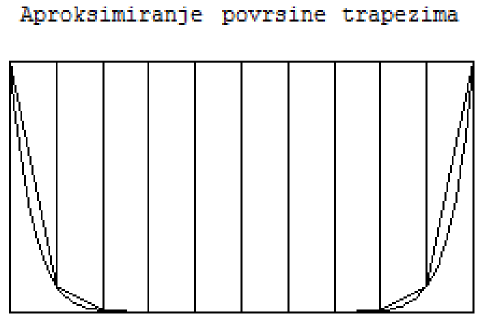


$n = 20$, $\triangle x = 1$,
$P \approx$

Aproksimacija površine trapezima - formula: $P \approx \frac{\triangle x}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)$

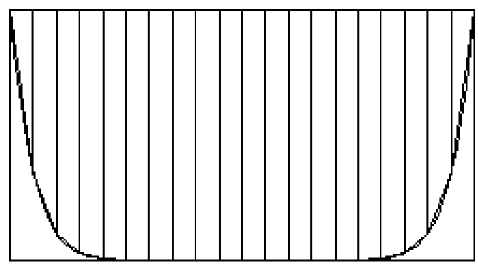
U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine trapezima. Za veći broj točaka diskretizacije n dobiva se preciznija aproksimacija. Korisimo formulu iz podnaslova. Kvalitetu aproksimacije moguće je procijeniti sa priložene slike na kojoj su nacrtani trapezi kojima se aproksimira površina glavnog rebra.

$n = 10$, $\triangle x = 2$, $P \approx$



.

$n = 10$, $\triangle x = 1$, $P \approx$

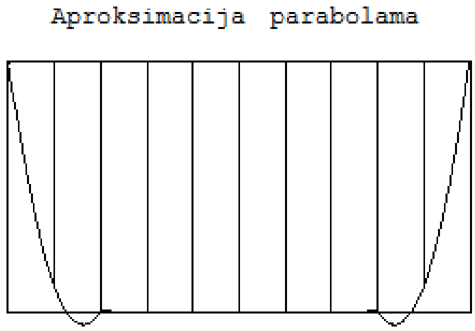


.

Simpsonova formula: $P \approx \frac{\triangle x}{3}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1}\right)$

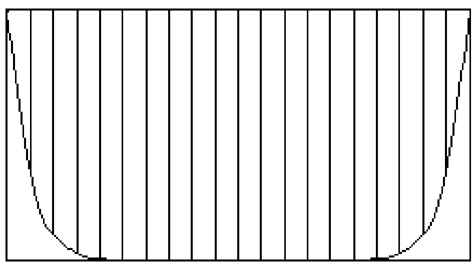
U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine parabolama (polinomima drugog stupnja). Preciznost ove metode je vrlo visoka za veći broj točaka diskretizacije. Primijetiti sa slike koja prikazuje ovu aproksimaciju za $n = 20$ kako aproksimirani oblik vjerno opisuje oblik glavnog rebra iz primjera. Koristiti formulu iz podnaslova.

$\triangle x = 2,\ P \approx$



.

$\triangle x = 1,\ P \approx$



.

Primitivna funkcija (antiderivacija)

Vidi Def 4.2.1. Za funkciju $f(x)$ primitivna funkcija je funkcija $F(x)$ takva da $F'(x) = f(x)$ (na intevalu I, osim možda na prebrojivo mnogo točaka).
Primjer. Koja je primitivna funkcija od $f(x) = \cos x$?

Primjer. Da li je $g(x) = \sin x + 5$ antiderivacija od $f(x) = \cos x$?

Primjer. Da li je $g(x) = \sin x - 35\pi$ primitivna funkcija od $f(x) = \cos x$?

Vidi Tm 4.2.1 i Def 4.2.2

1. Sve primitivne funkcije od f razlikuju se do na aditivnu konstantu.
2. Skup svih primitivnih funkcija od f naziva se neodređeni integral ili antiderivacija, a označava se sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$ tada je za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + c$ također primitivna funkcija od $f(x)$.
4. Možemo pisati
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$
5. Kod računanja elementarnih integrala možemo se služiti tablicom derivacija, ali »čitamo je u obrnutom smjeru«.
Služiti ćemo se sljedećom tablicom. Postoje i opširnije tablice, npr. `http://hr.wikipedia.org/wiki/Tablica_integrala`

f	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
$x^\alpha\ (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$

.

f	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

6. Vrijedi (*Tm. 4.2.2* i *Tm. 4.2.*3)

$$\begin{aligned}
\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= f(x) \\
\int f'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x) + c \\
\int a\,f(x)\,\mathrm{d}x &= a\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ (a\,\text{konstanta}) \\
\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Tablični integrali iz knjige prof. Uglešića "Viša matematika"

(2) $\int 0 \cdot dx = c;$

(3) $\int dx = x + c;$

(4) $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1;$

(5) $\int x^{-1} dx \equiv \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

(6) $\int e^x dx = e^x + c;$

(7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1;$

(8),(8′) $\int \sin x dx = -\cos x + c; \qquad \int \sinh x dx = \cosh x + c$

(9),(9′) $\int \cos x dx = \sin x + c; \qquad \int \cosh x dx = \sinh x + c$

(10),(10′) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c; \qquad \int \dfrac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$

(11),(11′) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c; \qquad \int \dfrac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c_1 = -\operatorname{arccot} x + c_2;$

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2;$

(14) $\int \dfrac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c_1, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c_2 & |x| > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+x}{1-x} \right| + c;$

(15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c_2;$

(16) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c_1 = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c_2.$

Tablični integrali koji se mogu koristiti na pismenom ispitu

Na ispitu iz matematike 2 moguće je koristiti samo sljedeću tablicu integrala. Ona se tokom ispita može dobiti od nastavnika.

Čak i tamo gdje nije izričito navedeno treba pribrojiti još sve funkcije koje se od navedene razlikuju za aditivnu konstantu.

$\int \mathrm{d}x = x$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$
$\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$	$\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$
$\int a^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \tanh x \, \mathrm{d}x = \ln|\cosh x|$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \coth x \, \mathrm{d}x = \ln|\sinh x|$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arccos \left(1 - \dfrac{x}{a}\right) + C$
$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right]$
$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x|$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$	$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \left(\dfrac{x}{a} \right) \right] + C$

Jednostavni zadaci neodređenih integrala. Računanje direktno iz tablice.

Odrediti neku primitivnu funkciju od $f(x) = x$. Odrediti integral $\int x \, \mathrm{d}x$.

Odrediti neku primitivnu funkciju od $f(x) = x^2$. Odrediti integral $\int x^2 \, \mathrm{d}x$.

Odrediti integral $\int x^3 \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int 4x^3 \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int \dfrac{x^3}{3} \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int 2x^5 \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int 1 \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int 5 \, \mathrm{d}x = \quad \int \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int 2x^5 + 5 \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - 5 \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int \sin x - \pi \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x =$

Odrediti integral $\int \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t =$

Odrediti integral $\int \frac{3}{\cos^2 y} \, \mathrm{d}y =$

Odrediti integral $\int \cos(2x) \, \mathrm{d}x =$

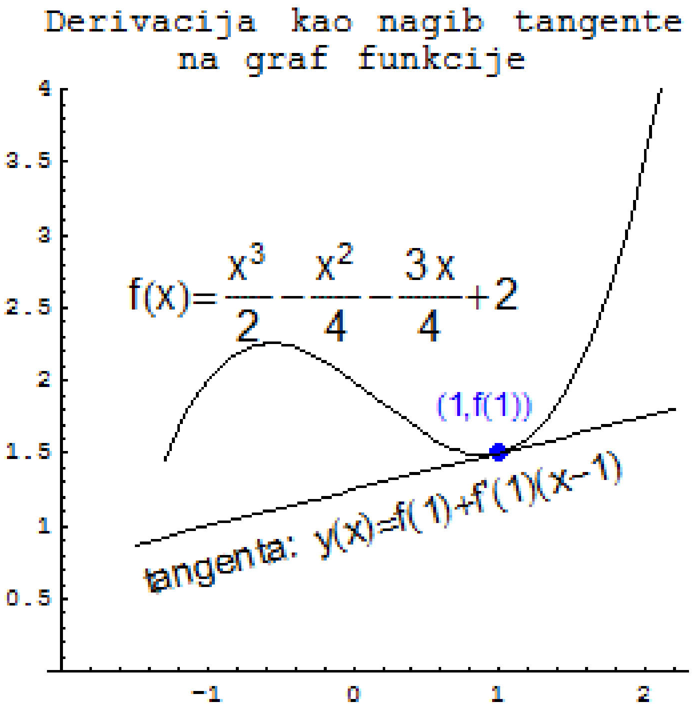
Odrediti integral $\int \left(\frac{2}{1-u^2} + \frac{1}{4(1-u^2)} + 3\right) \, \mathrm{d}u =$

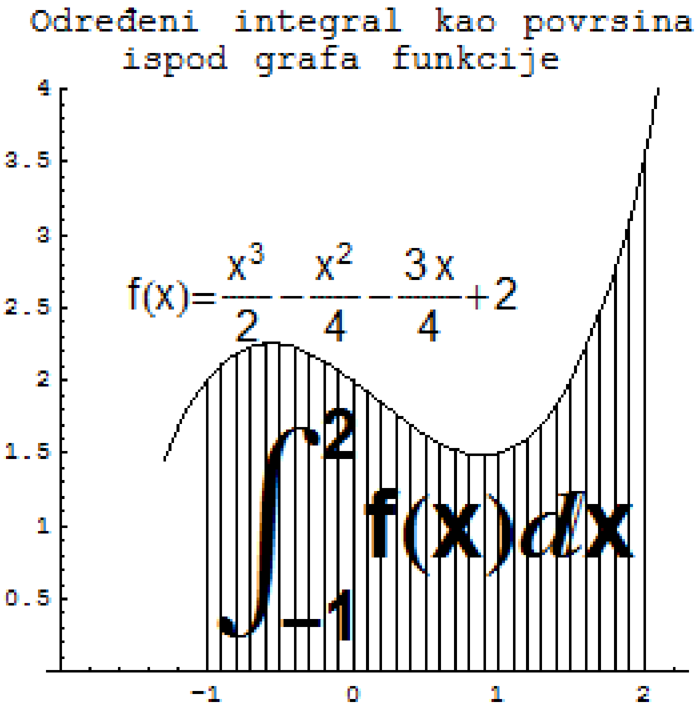
Odrediti integral $\int \frac{1}{1+v^2} + \frac{3}{\sqrt{1-v^2}} \, \mathrm{d}v =$

Nije nužno upisivati zagrade jer raspoznajemo da sve što se nalazi između znaka $\int$ i znaka $\mathrm{d}v$ treba integrirati.

Odrediti integral $\int \frac{2}{\sqrt{1+u^2}} \, \mathrm{d}u =$

Određeni integral i površina ispod krivulje

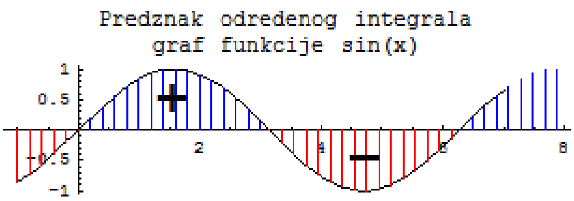




Određeni integral biti će preciznije definiran na predavanjima. Za sada je dovoljno reći da je određeni integral neprekidne funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ broj koji se označava oznakom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i koji odgovara površini između grafa funkcije $f(x)$ i osi x na intervalu $[a, b]$ (vidi sliku iznad). Predznak određenog integrala uzima u obzir da li je graf funkcije f iznad osi x $(+)$ ili ispod osi x (-). Vidi skicu grafa funkcije $\sin x$. Određeni integral je u bliskoj vezi s neodređenim integralom preko Newton-Leibnitzove formule (vidi Teorem 4.3.5) koja kazuje da ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$ tada vrijedi



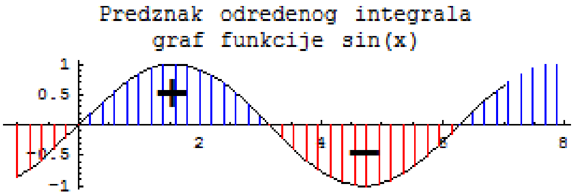
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \overset{\text{oznaka}}{=} \quad \Big[\; F(x) \;\Big]_a^b$$

Primjer. Dana je funkcija $y(x) = 12 - 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$. Izračunati neodređeni integral $\displaystyle\int_{-10}^{10} y(x)\,\mathrm{d}x$ i usporediti sa ranije napravljenim aproksimacijama u primjerima u kojima se aproksimira površina glavnog rebra. Koja je formula bila najpreciznija?

Primjer. Izračunati površinu ispod grafa funkcije $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{4} + 2$ na intervalu $[-1, 2]$.

Diskretizirati prethodnu funkciju u nekoliko točaka i ocjeniti grešku računanja površine primjenom trapezne formule $P \approx \dfrac{\triangle x}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)$.

Primjer. Izračunati površinu određenu grafom funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$ (*pazi na predznak, vidi sliku*).



Zapamtiti! Površina je uvijek pozitivan broj. Ako nekim računom ispadne negativan tada to upućuje na grešku u računu i nije dovoljno samo na kraju zamijeniti predznak, već treba istražiti grešku u računu.

Diskretizirati funkciju u nekoliko točaka i ocijeniti grešku računanja gornjeg određenog integrala primjenom Simpsonove formule $P \approx \frac{\triangle x}{3}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1}\right)$

Zadatak. Nađi površinu ispod krivulje $f(x) = \sin x$ između $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

Nepravi integral

Ponekad ima smisla tražiti površinu neomeđenih skupova. O tome govori nepravi integral.

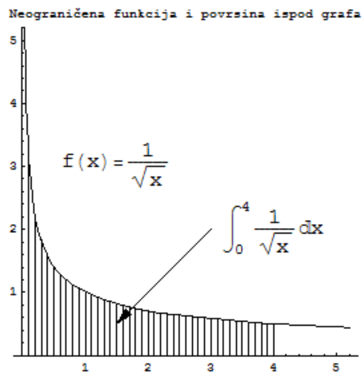
Nepravi integral je određeni integral takav da:

1. je podintegralna funkcija neograničena na intervalu integracije ili
2. je interval integracije neograničen.

Primjer: podintegralna funkcija neograničena na intervalu integracije

Riješiti: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=$

Primijeti da je područje na slici neograničeno odozgo. Nepravi integral ovog tipa riješavamo kao običan integral.



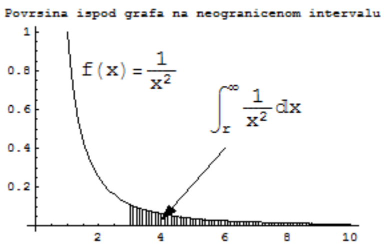
.

Primjer iz fizike (gravitacija $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Treba izračunati rad potreban za dovođenje tijela iz referentne točke do točke koja je na udaljenosti R od drugog tijela. Referentna točka je ona u kojoj je potencijalna energija $E_p = 0$, a to je $r = \infty$.

Nepravi integral ovog tipa riješava se prelaskom na limes, gdje umjesto $F(\infty)$ koristimo $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

$$W = E_p = \int_\infty^R F_G\,\mathrm{d}r = \int_\infty^R G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = (G,\, m_1,\, m_2 \text{ su konstante}) =$$

$$= G\, m_1 m_2 \int_\infty^R \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$



Zadatak. Neka je $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Odrediti $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Skicirati graf funkcije f i površinu određenu integralom.

Parcijalna integracija

Parcijalna integracija je primjena formule za derivaciju umnoška

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=(f(x)\cdot g(x))'$$

na integralni račun

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x+\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int (f(x)\cdot g(x))'\,\mathrm{d}x=f(x)\cdot g(x)+c$$

tako da se relativno komplicirani integral s lijeve strane pojednostavi na način

$$\begin{aligned}\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x,\\ \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x &= [f(x)\cdot g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Zamjenom varijabli $u=f(x)$ i $v=g(x)$ možemo pisati i ovako:

$$\begin{aligned}\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &= uv-\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x,\\ \int u\,\mathrm{d}v &= uv-\int v\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Primjer. Koristeći zamjenu $u=x$ i $\mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x$ izračunati

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} u=x\,; & \mathrm{d}u=u'=1\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\,; & v=\int\mathrm{d}v=\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\end{array}\right\}=uv-\int v\,\mathrm{d}u=$$

Presudan je odabir: u se treba pojednostaviti derivacijom i/ili $\mathrm{d}v$ pojednostaviti integracijom. Važno!

Primjer. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=$

.

$$\int x\,(x+1)^5\,\mathrm{d}x=$$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=$$

.

$$\int_0^1 (x+2)\,(x+1)^8\,\mathrm{d}x=$$

$\int\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$\int\arctan x\,\mathrm{d}x=\int\arctan(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} u=\arctan x\,; & \mathrm{d}u=u'=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ \mathrm{d}v=1\,\mathrm{d}x\,; & v=\int\mathrm{d}v=\int 1\,\mathrm{d}x=x\end{array}\right\}=$$

Zadaci za samostalan rad:

1. $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ 2. $\int 2x(x+1)^3\,\mathrm{d}x$ 3. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ 4. $\displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 5. $\int (x-1)\sin(x-1)\,\mathrm{d}x$

6. $\int 3x\,\mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ 7. Riješiti parcijalnom integracijom korištenjem $u=\ln x$ i $\mathrm{d}v=1\,\mathrm{d}x$: $\displaystyle\int\ln x\,\mathrm{d}x$

Često je parcijalnu integraciju potrebno upotrijebiti nekoliko puta u nizu:

Primjer. $\int x^3 e^x \, dx =$

$$\int_0^{\pi} 2x^2 \cos x \, dx$$

$$\int \sin^3 x \cos^5 x$$

» *Teži zadatak* «
Opcija je da iskoristiš $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Samostalno riješiti: 1. $\int x^3 \sin x \, dx$, 2. $\int x^2 e^{-x} \, dx$, 3. $\int_0^1 x^2 (x+1)^4 \, dx$, 4. $\int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

Ponekad se uzastopnom parcijalnom integracijom naizgled »zavrtimo u krug«.

Primjer. $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cos x$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{e}^x =$$

Samostalno.

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$$

Samostalno.

Integriranje zamjenom varijabli - supstitucijom

Supstitucija se sastoji u tome da se nekom dopustivom zamjenom integracijske varijable ili podintegralnog izraza polazni integral svede na neke od onih tabličnih. (*Vidi teorem 4.2.5 iz knjige*)

Primijenimo pravilo za deriviranje kompozicije funkcije:

$$F'(g(x)) \cdot g'(x) = (F \circ g)'(x).$$

Integrirajmo:

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) = \int (F \circ g)'(x) = (F \circ g)(x) + c$$

Zaključimo: ako je f neprekidna funkcija i F njena primitivna funkcija (*čitaj:* $F'(x) = f(x)$), a uz to g neprekidno derivabilna funkcija (*čitaj:* $g'(x)$ neprekidna). Tada je

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(g(x)) + c.$$

Drugim riječima, napravili smo zamjenu varijabli $t = g(x)$:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\,(g(x)) = g'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

Primjer. Iskoristiti supstituciju varijabli $2x + 1 = u$ za rješenje integrala $\int (2x+1)^2\ \mathrm{d}x$.

Riješiti: $\int\limits_0^1 (2x+1)^2\ \mathrm{d}x$

Pazi na granice integracije! Možemo prvo riješiti neodređeni integral i na kraju uvrstiti granice integracije.

Iskoristiti supstituciju varijabli $x^2 = u$ za rješenje integrala $\int 2x\,\cos\left(x^2\right)\ \mathrm{d}x$

$\int\limits_{-1}^{1} 2x\,\cos\left(x^2\right)\ \mathrm{d}x =$

Pazi na granice integracije!

Za samostalan rad:

- Supstitucijom $1 - 3x = z$ riješiti $\int\limits_{-2}^{0} 3\sqrt{1-3x}\,\mathrm{d}x$
- Pogodnom supstitucijom riješiti $\int (5-6x)^{-3}\,\mathrm{d}x$

Zadaci:

.

$$\int (4y-9)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y$$

$\int \cos(5t)\ \mathrm{d}t=$

.

$$\int x^2\left(x^3-8\right)^{11}\mathrm{d}x=$$

$$\int \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

.

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

Pazi na domenu!

$$\int_1^2 x\ \cos(3x^2+4)\,\mathrm{d}x=$$

.

$$\int \frac{\sin(\ln 3x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

.

$$\int_2^3 \frac{2x^2+x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

Zadaci za samostalan rad:

1. Supstitucijom $1-x^2=t$ riješiti $\int 4x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$ 2. Riješiti $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

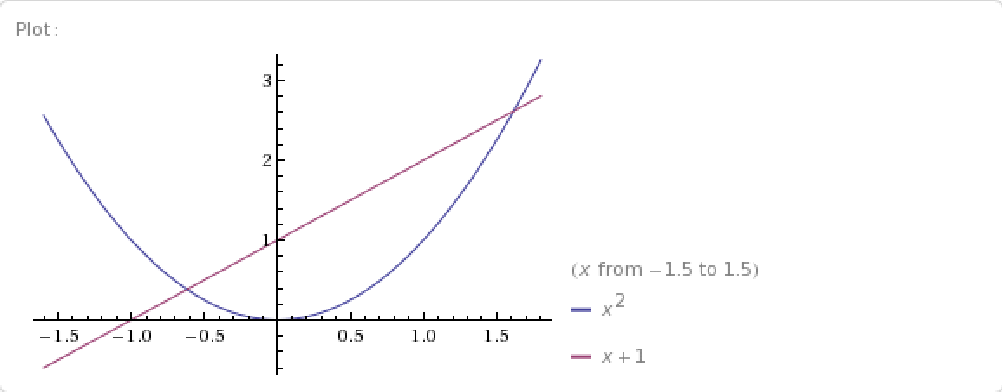
3. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 4. $\int \frac{x^2+x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 5. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sin(2x^3-3)\,\mathrm{d}x$

Traženje površine između krivulja integriranjem i druge primjene

Površina između dvije krivulje određuje se kao integral razlike funkcija određenih gornjom i donjom krivuljom na intervalu određenom sjecištima.

Jednostavniji primjeri

Odrediti površinu dijela ravnine omeđenog parabolom $y = x^2$ i $y = x + 1$.



1. Sjecišta …
2. Slika … ✔
3. $\displaystyle\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \left[\boxed{} - \left(\boxed{} \right) \right] \mathrm{d}x =$

Odrediti površinu između krivulja $y = 2t - t^2$ i $y = t$.

Sjecišta parabole sa x osi određena su sa $2t - t^2 = -(t-0)(t-2)$ Tjeme parabole nalazi se na pola između sjecišta sa x osi.

1. Sjecišta

2. Slika[1]

3. Površina $= \displaystyle\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \left[\boxed{} - \left(\boxed{} \right) \right] \mathrm{d}x =$

Odrediti površinu između krivulja $y = x + 2$ i $y = 4 + x - x^2$.

1. Sjecišta...

2. Slika...

Tjeme parabole:

$$
\begin{aligned}
y' &= 0 \\
\left(4 + x - x^2\right)' &= 0 \\
1 - 2x &= 0 \\
x &= {}^1\!/_2
\end{aligned}
$$

3. Površina=...

[1] Graf polinoma nultog reda (konstanta) je horizontalni pravac.

Graf polinoma prvog reda (afina funkcija) $f(x) = a\,x + b$ je pravac kojem je b odsječak na y-osi, dok je a koeficijent smjera (određuje nagib: pomak za 1 u smjeru x-osi donosi pomak za a u smjeru y-osi). Također, svaki pravac je potpuno određen sa dvije točke.

Graf polinoma drugog reda je parabola. Parabolu možemo pokušati skiciramo tako da odredimo dvije nultočke (ako postoje) i vrijednost u sredini među nultočkama (tjeme parabole). Tjeme parabole je lokalni ekstrem pa se može dobiti i kao nultočka prve derivacije. Predznak uz kvadratni član određuje da li je parabola okrenuta prema gore (+) ili prema dolje (-).

Slika krivulja mora odgovarati ranije pronađenim sjecištima!

Kod crtanja grafa može vam pomoći znanje iz dodatka D2 matematike 1 koji se nalazi na mrežnom mjestu `http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1/dodatak2.pdf`.

Odrediti površinu između krivulja[2] $y = 2x^2 + 1$ i $y = x^2 + 2x + 4$.

[2]Dvije parabole. Kod crteža primijetiti $y = x^2 + 2x + 4 = x(x+2) + 4$ ili crtati skicu pomoću tjemena parabola i sjecišta.

Zadaci za samostalnu vježbu:

1. Izračunati površinu između krivulja zadanih jednadžbama $y = 2x - 1$ i $y = 1 + 3x - x^2$.

2. Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x^2 + 9$ i pravcem $y = 9x$.

3. Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y = x^2 - 4x - 5$ i pravcem $y = x + 1$.

4. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = x$ i $y = x^3$ u dijelu ravnine gdje je $x \geq 0$.

5. Izračunati površinu lika između parabole $y = x^2 - x - 3$ i pravca $y = x$.

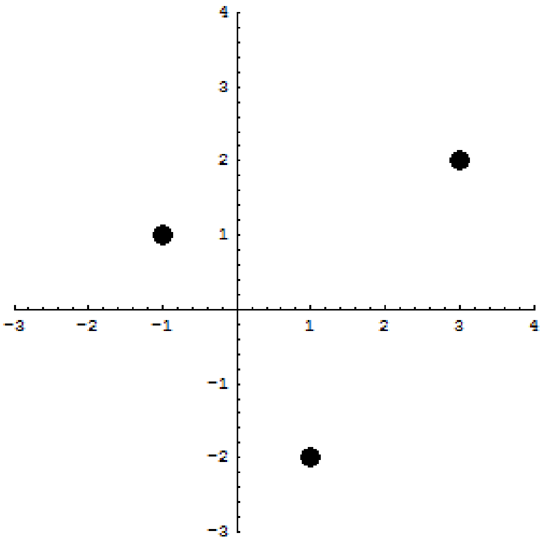
6. Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $y = x + 1$ i parabolom $y = x^2 - x - 2$.

7. Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y = 2 - 2x - x^2$ i pravcem $y = 3x - 3$.

Računanje površine integriranjem po dijelovima

Pronaći površinu trokuta zadanog točkama $A(-1, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$. Koji pravci[3] omeđuju dani trokut?

1. slika trokuta
2. koje krivulje određuju trokut?
3. granice integracije
4. postaviti integral



Pronaći površinu trokuta zadanog točkama $A(-1, -2)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$.

1. slika trokuta
2. koje krivulje određuju trokut?
3. granice integracije
4. postaviti integral

[3] Pravac kroz dvije točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) odgovara jednadžbi $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

Zadaci za samostalnu vježbu:

1. Integriranjem odrediti površinu trokuta koji je zadan točkama $A(2,2)$, $B(0,-4)$, $C(4,0)$. Rješenje $P = 8$

2. Pronaći površinu trokuta koji je zadan točkama $A(3,3)$, $B(0,1)$, $C(3,-1)$. Rješenje $P=6$

3. Izračunati površinu trokuta zadanog točkama $A(0,0)$, $B(-2,2)$, $C(-1,-1)$. Rješenje $P=2$

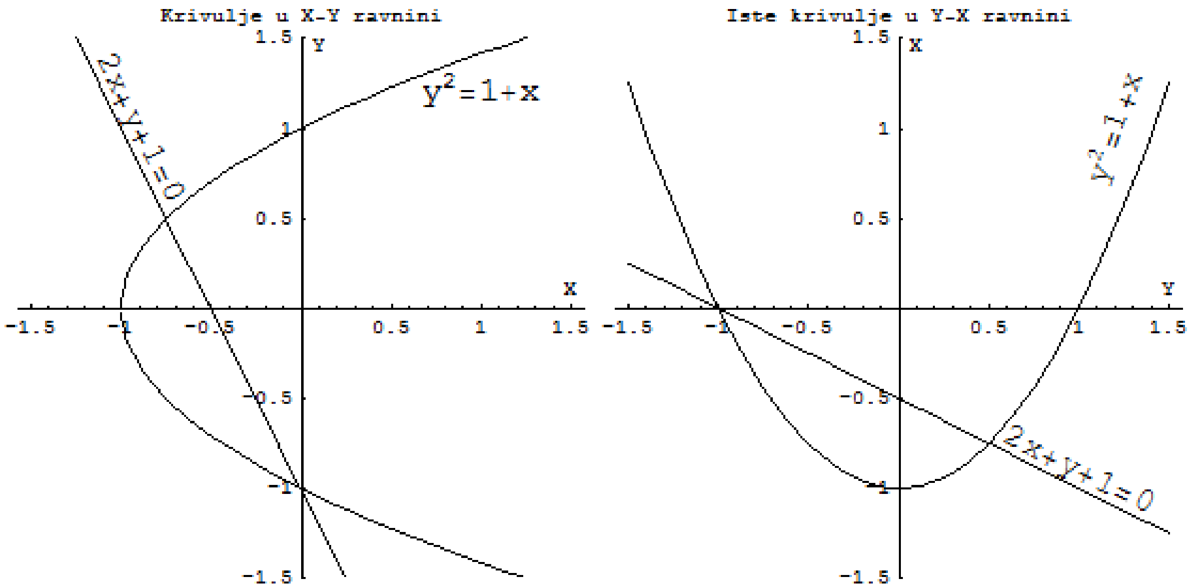
Računanje površine uz zamjenu osi $x \leftrightarrow y$

Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $2x + y + 1 = 0$ i parabolom $y^2 = 1 + x$.

1. Sjecišta

2. Slika

Kvadratni član je y^2 i stoga promatrajmo krivulje kao funkcije $x = f(y)$. Mijenjamo osi $x \leftrightarrow y$.



3. Ako računamo prema (prvoj) slici u $x - y$ ravnini računamo:

   $P_1 =$

   $P_2 =$

   $P = P_1 + P_2 =$

   Ako računamo u $y - x$ ravnini (druga slika):

   Sam procijeni koji ti je postupak jednostavniji.

   $P =$

Izračunati površinu lika omeđenog parabolama $y^2 = 2x + 5$ i $y^2 = -2x + 3$.

Kada se javljaju parabole sa članom y^2 možda je najbolje odmah napraviti zamjenu $x \leftrightarrow y$.

Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y^2 = 2x + 5$ i pravcem $y = -\sqrt{3}x$.

Zadatak za samostalnu vježbu:

Izračunati površinu područja omeđenog krivuljama $y^2 - 2y - 2 + x = 0$ i $x + y + 1 = 0$. (Rj. $P = \frac{7\sqrt{21}}{2}$.)

Integriranje racionalnih funkcija

Podsjetnik: racionalne funkcije u brojniku i nazivniku sadrže polinome. Metode rješavanja integrala racionalnih funkcija sažete su u ovoj cjelini.

Tri važna tipa integrala

Tip A: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-c)^n}$ **rješavamo supstitucijom** $t = x - c$

Primjer. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^3} =$

Ovo je lagano!
Obična supstitucija.

Tip B: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$**, gdje je** $b^2 - 4ac < 0$

Treba ax^2+bx+c iz nazivnika prikazati u obliku $(\textit{nešto})^2 + \textit{broj}$, a zatim napraviti supstituciju $t = \textit{nešto}$:

Primjer. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4} =$

Uvjet $b^2 - 4ac < 0$ znači da se ax^2+bx+c ne može rastaviti na realne faktore kao u tipu A.

Integral **tipa B** dodano se komplicira kada je $n > 1$. Sada ćemo napraviti primjer kada je $n = 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+4)^2} = \left\{ \begin{array}{c} \text{u nazivniku želimo dobiti} : (\textit{nešto})^2 + \textit{broj} \\ x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left((x-1)^2+3\right)^2} =$$

$$. \quad = \left\{ \begin{array}{c} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t =$$

$$. \quad = \frac{1}{3}\int \frac{t^2+3-t^2}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{t^2+3}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t}_{\text{riješavam odvojeno}} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{t^2}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t}_{\text{riješavam odvojeno}} = (\blacksquare) = \ldots$$

Nazivnika nema nultočke!
1. korak: nazivnik$=t^2+\textit{broj}$
2. korak: u brojniku »izmislimo« nazivnik
3. korak: rastavimo i odvojeno riješimo

$$\int \frac{t^2+3}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \int \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \left\{ \begin{array}{c} y = \dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan y =$$

$$. \quad = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Integral $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}$ je tablični.

$$\int \frac{t^2}{(t^2+3)^2}\mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ll} u = t, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2}, & v = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+3} \end{array} \right\} = \overbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+3} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}}^{uv-\int v\,\mathrm{d}u} =$$

$$. \quad = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+1+3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Parcijalnom integracijom opet smo se sveli na $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}$

$$. \qquad \ldots = (\blacksquare) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

U prethodnom primjeru rješili smo integral racionalne funkcije **tipa B** (kvadratni član u nazivniku nema nultočaka) za potenciju $n = 2$. Primijeti da se integral $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2}$ sveo na rješavanje integrala $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^1}$. Dakle s potencije $n = 2$ sveli smo se na potenciju $n = 1$. Možemo zaključiti kako se svaki integral **tipa B** može riješiti tako da se koracima pokazanim u prethodnom primjeru svedemo sa potencije nazivnika n na sličan integral sa potencijom nazivnika $n-1$, i tako redom sve dok se integral ne svede do potencije nazivnika $n = 1$, u kojem slučaju se integral supstitucijom svodi na tablični.

Tip C: $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$**, gdje je** $b^2-4ac<0$**.**

Rješavamo supstitucijom $t = ax^2+bx+c$, $\mathrm{d}t = (2ax+b)\,\mathrm{d}x$. Nakon toga potrebno je u brojniku izmisliti $(2ax+b)\,\mathrm{d}x$.

Primjer. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+4}\mathrm{d}x =$

Razlika u odnosu na tip B je x u brojniku. Primijeti da je sada supstitucija drugačija! Dijelom se ovaj integral ipak svodi na tip B.

Dalje, pogledajmo kako riješiti **tip C** kada je potencija u nazivniku $n=2$:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2-2x+4\right)^2} = \left\{\begin{array}{c}\text{ako}\, u = x^2-2x+4\\ \text{tada}\,\mathrm{d}u = 2x-2\end{array}, \text{ a želim dobiti } \mathrm{d}u \text{ u brojniku}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2-2x+4\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-2}{\left(x^2-2x+4\right)^2}\mathrm{d}x}_{=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = \frac{-1}{x^2-2x+4}} + \underbrace{\int \frac{1}{\left(x^2-2x+4\right)^2}\mathrm{d}x}_{\textbf{tip B}\text{: vidi prethodni primjer}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

Vidimo da se tip C jednostavno svodi na tip B. To će vrijediti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Samostalno riješiti: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x =$

Integral racionalne funkcije

Ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak stupnju polinoma iz nazivnika tada je prvi korak u riješavanju takvog integrala da se polinom iz brojnika podijeli sa polinomom iz nazivnika:

Primjer: $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x =$

$x^3 \quad : (x^2+3x+5) = x-3+\frac{4x+15}{x^2+3x+5}$

»Rastavom na parcijalne razlomke«[4] svaki integral racionalne funkcije kojem je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika može se svesti na neki od prije navedena tri tipa integrala: A, B ili C.

Primjer. Riješi integral $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$

Koraci riješavanja:

1. dijeljenjem svedi najveću potenciju brojnika ispod potencije nazivnika,
2. takav integrand rastavi na parcijalne razlomke,
3. integriraj parcijalne razlomke.

[4] Ako je zadana racionalna funkcija oblika u kojem je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tada rastav na parcijalne razlomke prvo zahtjeva da se odrede svi faktori polinoma $Q(x)$, a to mogu biti samo polinomi stupnja jedan i polinomi stupnja dva bez realnih nultočaka. Također treba uzeti u obzir kratnost svakog takvog faktora. Npr. polinom $Q(x)=x^4+x^2$ može se zapisati kao $Q(x)=x^2\left(x^2+1\right)$. Iz toga se vidi da je faktor x kratnosti 2, a faktor x^2+1 kratnosti 1.

Nakon toga se racionalna funkcija želi zapisati kao zbroj razlomaka kojima se u nazivnicima pojavljuju po jedan od pronađenih faktora $Q(x)$. Pritom se faktori višekratne kratnosti pojavljuju više puta, onoliko puta kolika je kratnost faktora, ali svaki puta s različitom potencijom. U brojniku parcijalnih razlomaka stavljamo neodređene koeficijente i to tako da za nazivnike koji su se nastali od faktora stupnja 1 (bez obzira na kratnost) u brojnik postavljamo jedan neodređeni koeficijent, a za nazivnike koji su nastali od faktora stupnja 2 (bez obzira na kratnost) u brojnik postavljamo polinom stupnja 1 sa neodređenim koeficijentima (C_1x+C_2). U razmatranom primjeru rastav na parcijalne razlomke glasi $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ gdje još treba odrediti nepoznate koeficijente A, B, C, D. Nepoznate koeficijente možemo odrediti svođenjem na zajednički nazivnik i uspoređivanjem dobivenog brojnika sa polinomom $P(x)$. Izrazi uz iste potencije moraju biti jednaki. Time se dobije sustav linearnih jednadžbi čija riješenja su traženi nepoznati koeficijenti.

Drugi primjer:

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \\ \left\{\begin{matrix} A=\frac{1}{2}, & C=\frac{-1}{2} & E=\frac{-1}{2}, \\ B=\frac{1}{4}, & D=\frac{1}{4}, & F=0 \end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{4(1+x)^2}+\frac{1-2x}{4\left(1+x^2\right)}-\frac{x}{2\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Primjer. Riješi integral $\int \frac{\left(x^4 - 2x^3\right)\,\mathrm{d}x}{\left(4x^2 + 3x - 1\right)(x - 1)}$

Riješi $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\,(x^2 + x + 1)^2}$

Pazi! Višekratni korijen u nazivniku.

Za samostalan rad - izračunaj integral i provjeri rezultat deriviranjem:

1. $\int \frac{x^3}{x^3-9x}\,\mathrm{d}x$, 2. $\int \frac{3y+5}{y^2-y}\,\mathrm{d}x$, 3. $\int \frac{u^2-3}{u^3-3u^2}\,\mathrm{d}x$, 4. . $\int \frac{u^2-3}{u^3+u}\,\mathrm{d}x$, 5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+16x}$

6. $\int \frac{4x\,\mathrm{d}x}{x^3-x^2+x-1}$, 7. $\int \frac{4x^5+2x^4+1}{x^4-x^3}\,\mathrm{d}x$, 8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x^2+4x}$, 9. $\displaystyle\int \frac{\left(x^7+1\right)\,\mathrm{d}x}{x^2(x^2+2x+2)^2}$

Integriranje kompozicije racionalne s trigonometrijskom funkcijom

Neka je $R(x,y)$ neka racionalna funkcija varijabli x i y. Tada sa $R(\sin x, \cos x)$ označavamo kompoziciju racionalne s trigonometrijskim funkcijama. Na primjer, ako je $R(x,y) = \dfrac{x+y}{y^2-xy}$, tada je $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$. Dalje, ako je na primjer $R(\sin x, \cos x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ tada možemo uzimati $R(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Neke kompozicije racionalne i trigonometrijske funkcije lagano je integrirati: bilo tablično ili tehnikama izloženim ranije. Na primjer, ranije smo izračunali $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$, $\int \mathrm{d}x / \cos^2 x = \tan x + C$, ... Sada ćemo dati proceduru za integriranje složenijih kompozicija racionalne i trigonometrijske funkcije. Ovu vrstu integrala riješavamo jednom od predloženih supstitucija:

Supstitucija	x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	Kada koristimo?
$t = \tan\frac{x}{2}$	$x = 2\arctan t$	$\dfrac{2t}{1+t^2}$	$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\dfrac{2t}{1-t^2}$	$\dfrac{1-t^2}{2t}$	U najopćenitijem slučaju.
$t = \tan x$	$x = \arctan t$	$\pm\sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}}$	$\pm\sqrt{\dfrac{1}{1+t^2}}$	t	$\dfrac{1}{t}$	Ako vrijedi : $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$.
$t = \sin x$	$x = \arcsin t$	t	$1-t^2$			U slučaju $\int R(\sin x)\cos x \, \mathrm{d}x$.
$t = \cos x$	$x = \arccos t$	$1-t^2$	t			U slučaju $\int R(\cos x)\sin x \, \mathrm{d}x$.

Primjer.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x - \sin x \cos x} \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rl} t = \tan\frac{x}{2}, & x = 2\arctan t \\ & \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \ldots$$

$$\int \frac{\cos x}{(1+\cos x)^3} \mathrm{d}x =$$

Ponekad se integrali koji uključuju trigonometrijske funkcije značajno pojednostavne kada se iskoristi pogodan trigonometrijski identitet. Među najkorisnijim identitetima su:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Primjer. Riješiti integral $\int \sin^5 x \, \mathrm{d}x$

Riješiti integral $\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$

Samostalno za vježbu:

1. $\int \dfrac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\cos x + 5}$, 2. $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$, 3. $\int \sin^2 x \, \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, 4. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x \, (2\cos^2 x - 1)}$, 5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5}$

Integrali koji uključuju korijen

Integrali funkcija tipa $R(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, , x^{\frac{m_k}{n_k}})$ i $R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, , \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})$

Riješavamo tako da odredimo n, a to je zajednički višekratnik od n_1, n_2, do n_k. Zatim izvršimo supstituciju $x = t^n$.

Primjer. $\int \frac{\sqrt[2]{x}}{4+\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x =$

Primjer. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Zadaci za samostalan rad: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $\int \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\mathrm{d}x$

Integrali funkcija tipa $\dfrac{polinom(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ i $R\left(x,\, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Obratite pažnju na 3 tablična integrala koja nam koriste kod riješavanja integrala ovog tipa:

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$

Funkcija $\cosh^{-1}$ je area cosinus hiperbolni koja se negdje označaava sa arch. Funkcija $\sinh^{-1}$ je area sinus hiperbolni koja se negdje označaava sa arsh.

Svaki integral oblika $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ može se svesti na jedan od gornja tri tako da prvo transformiramo izraz $ax^2+bx+c = \pm\left(\text{član sa}\, x\right)^2 \pm broj$, a zatim izlučimo $broj$ tako da $\check{c}lan\, bez\, x$ bude 1.

Primjer.

$$\begin{aligned}
4x^2+6x+3 &= (2x)^2 + \underbrace{2\cdot 2x \cdot \underline{\ ?\ }}_{=6x} + 3 \\
&= (2x)^2 + \underbrace{2\cdot 2x\cdot \frac{3}{2}}_{=6x} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \underline{\ ?\ }}_{=3} \\
&= \left[(2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \left(3 - \frac{9}{4}\right) \\
&= \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right]
\end{aligned}$$

Zadatak. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+6x+3}} =$

Transformiraj izraz tako da bude pogodan za integriranje pod korijenom, kao u prethodnom primjeru:

$$\begin{aligned}
4x^2+4x-3 &= (2x)^2+\underbrace{2\cdot 2x\cdot \underline{\ ?\ }}_{=4x}-3\\
&= (2x)^2+\underbrace{\qquad\qquad}_{=4x}+\underbrace{\qquad\quad}_{=-3}\\
&= \\
&= \\
&= 4\left[\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2-1\right]
\end{aligned}$$

Zadatak.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}}=$$

Integral funkcije tipa $\dfrac{polinom(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gdje je $polinom(x)$ stupnja n riješavamo tako da postavimo jednadžbu

$$\int \frac{polinom(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

a zatim nepoznanice A_0, A_1, ..., A_{n-1} i B odredimo iz derivacije gornje jednadžbe.

Primjer. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = ?$

Polinom u brojniku je stupnja $n = 2$. Postavimo jednadžbu:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = (A_0 + A_1 x)\sqrt{9-4x^2} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$$

Derivacija prethodne jednadžbe:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}} &= A_1\sqrt{9-4x^2} + (A_0 + A_1 x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-4\cdot 2x}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{B}{\sqrt{9-4x^2}}\\ &= \frac{A_1\left(9-4x^2\right) - 4x\,(A_0 + A_1 x) + B}{\sqrt{9-4x^2}}\end{aligned}$$

Nepoznanice ćemo odrediti tako da usporedimo članove s istom potencijom od x:

$$\begin{aligned} x^2 &: \ 1 = -4A_1 - 4A_1\\ x &: \ 0 = -4A_0\\ 1 &: \ 0 = 9A_1 + B\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{1}{8}x\sqrt{9-4x^2} + \frac{9}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$$

i preostaje odrediti još samo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$ ...

Prvo napravimo prikladnu transformaciju izraza

$$9 - 4x^2 = 9\left[1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2\right]$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} =$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{1}{8}x\sqrt{9-4x^2} + \frac{9}{16}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Samostalno riješiti: 1. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9+4x^2}}$, 2. $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$, 3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x-x^2}}$

Binomni integral

Integral oblika

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, \mathrm{d}x, \quad m,n,p \in \mathbb{Q},\ a,b \in \mathbb{R}$$

riješavamo prema sljedećim slučajevima:

$x^m (a+bx^n)^p$	Test	Supstitucija
1. slučaj	$p \in \mathbb{Z}$	$x = t^k$, gdje je k zajednički nazivnik od m i n
2. slučaj	$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$	$a + bx^n = t^k$, gdje je k nazivnik od p
3. slučaj	$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$	$ax^{-n} + b = t^k$, gdje je k nazivnik od p

Riješiti sljedeće integrale:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

3. $\displaystyle\int x^5 \sqrt[7]{2-3x^6} \, \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$

5. $\displaystyle\int x^{-11} \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x$

Nekoliko dodatnih primjera primjene integrala

Primjer iz fizike (jednoliko ubrzano gibanje).

Poznata je jednažba koja vezuje brzinu v i akceleraciju a kod jednoliko ubrzanog gibanja: $v(t) = a\,t$, gdje je t vrijeme proteklo od trenutka ubrzanja s početne brzine $v(0) = 0$. Također, poznato je da se put s koji je prijeđen pravocrtnim gibanjem može izraziti u ovisnosti od brzine $v(t)$ kao integral: $s(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Potrebno je izraziti put s kao funkciju vremena pri jednoliko ubrzanom gibanju.

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0}^{t} a\,\tau\,\mathrm{d}\tau =$$

Primjer iz fizike (opruga).

Potrebno je izračunati rad za natezanje opruge iz neopterećenog položaja $s = 0$ do položaja $s = x$. Poznato je da opruga istegnuta za udaljenost x od neopterećenog položaja djeluje silom u smjeru suprotnom istegnuću sa iznosom $F = k\,x$, gdje je k konstanta elastičnosti opruge. Također je poznato da se rad obavljen na putu s pod djelovanjem sile F računa kao $W = \int F\,\mathrm{d}s$. Potrebno je izraziti W kao funkciju udaljenosti od položaja ravnoteže x.

$$W = \int\limits_{0}^{x} F\,\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{x} k\,s\,\mathrm{d}s =$$

Duljina luka krivulje

Vidi knjiga Napomenu 4.3.6.b) na str. 227.

Volumen rotacionog tijela

Vidi knjiga Napomenu 4.3.6.c) na str. 229 i Primjer 4.3.14 na str. 230.

Oplošje rotacionog tijela (ploština rotacione plohe)

Napomenu 4.3.6.d) na str. 230 i Primjer 4.3.15 na str. 231.

Poglavlje 2

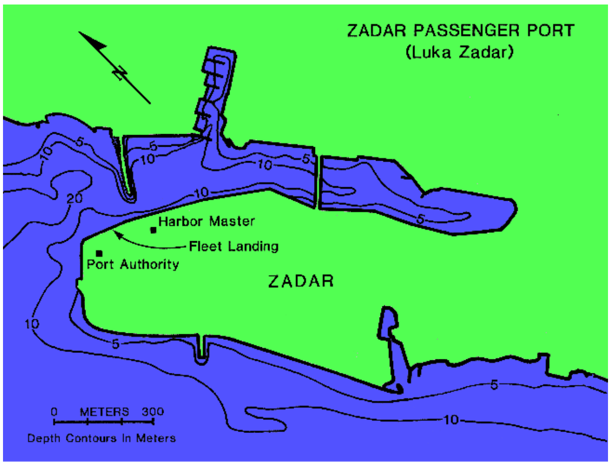
Skalarna funkcija

Skalarna funkcija je funkcija nekoliko (m) realnih varijabli čije su vrijednosti realni brojevi. Možemo je ovako označiti

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

U gornjem primjeru sa Ω je označena domena funkcije (područje na kojem je funkcija zadana nekim pravilom). Evo nekoliko primjera.

Primjer: dubina mora



Slika 2.0.1: Luka Zadar. Svaka točka na karti može se označiti sa dvije varijable: geografska širina i visina. Plavom bojom označena je morska površina na kojoj je definirana dubina mora.

Neka je λ zemljopisna dužina i φ zemljopisna širina. Vrijedi da je uređeni par $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ jedna točka u ravnini. Sa $\mathcal{M}$ označimo sve točke (λ, φ) koje pokriva more. Tada je $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$. Složimo se da je na svakoj točki površine mora određena dubina i da je to realni broj. Definirajmo sada funkciju dubine mora kao funkciju

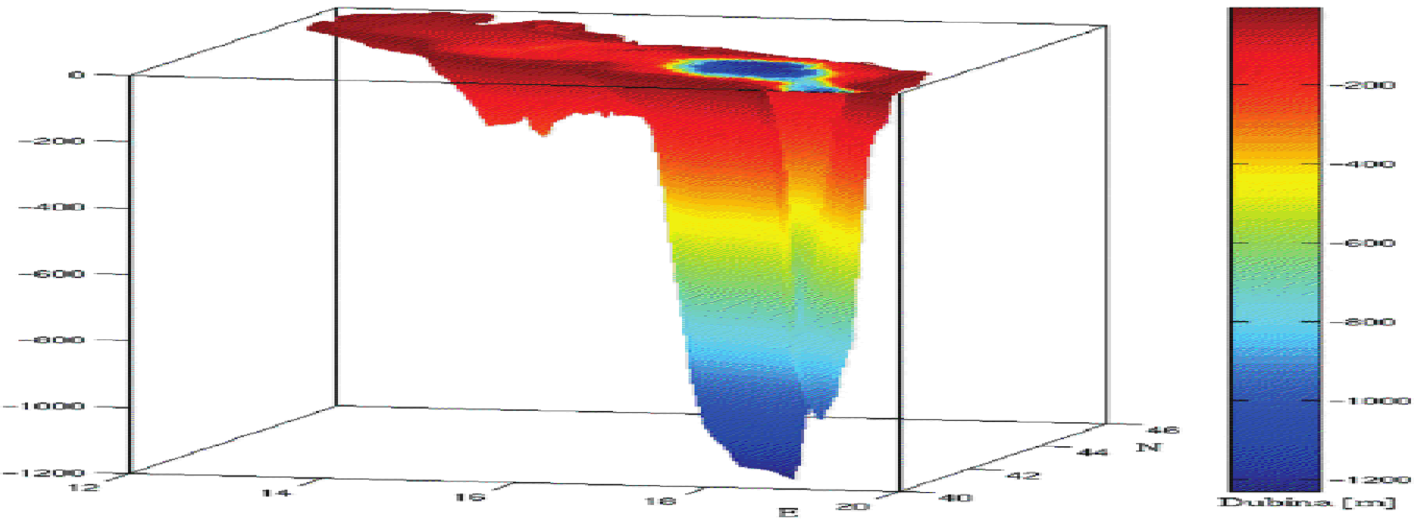
$$d : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

s pravilom da je $d(\lambda, \varphi) =$ dubina mora na koordinatama (λ, φ). Prema našim oznakama $\mathcal{M}$ je domena funkcije d. Skup svih vrijednosti koje funkcija može poprimiti naziva se kodomena funkcije. U našem slučaju kodomenu funckije d označiti ćemo sa $d[\mathcal{M}]$. Na slici 1 kodomena je skup vrijednosti dubine umetrima između 0 i nešto više od 20.

Kako vidimo na slici 1 skalarna funkcija u ravnini može se lijepo vizualizirati pomoću linija koje se nazivaju razinske krivulje. Za svaku vrijednost iz kodomene $z_0 \in d[\mathcal{M}]$ možemo odrediti jednu razinsku krivulju — to su sve točke koje zadovoljavaju jednadžbu

$$d(\lambda, \varphi) = z_0.$$

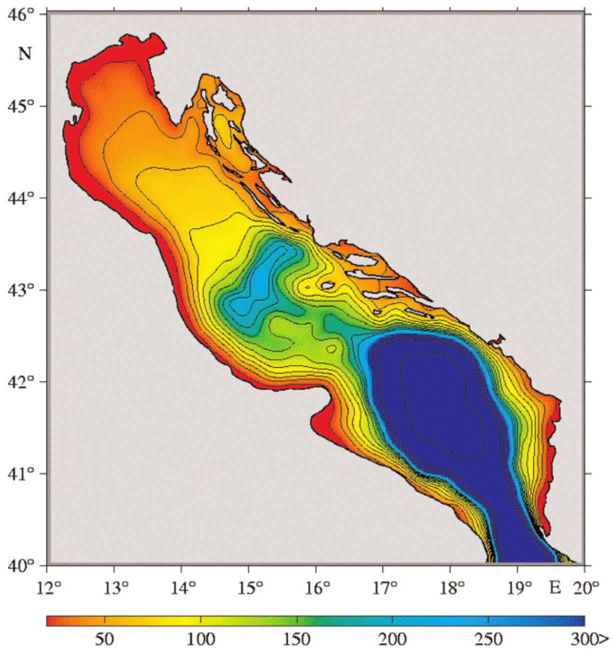
Na slici 1 dane su razinske krivulje (izobate) za dubinu mora 5, 10 i 20 metara i one nam dovoljno dobro dočaravaju vrijednosti dubine mora na području koje pokriva karta. Kada su dvije razinske krivulje na karti relativno blizu jedna drugoj možemo zaključiti da se u tom području brzo mijenjaju vrijednosti funkcije. U ovom primjeru s dubinom mora govorimo o naglom porastu dubine. Matematičkim riječnikom govorimo o velikom gradijentu funkcije dubine.



Slika 2.0.3: Batimetrija Jadranskog mora. (3D prikaz)

Na slici 2 dubinu mora možemo vizualizirati još bolje jer se autor osim ravninskih krivulja poslužio i bojom. Krajnjim crvenim dijelom spektra označio je najmanje vrijednosti dubine, a krajnjim plavim (ljubičastim) bojama najdublja područja. U usporedbi s izobatama nijansiranje boja omogućuje suptilniju vizualizaciju dubine mora. Uz ovu sliku u članku I. Janeković, *Modeliranje morskih mijena Jadrana*, Ruđer, vol. 3, broj 4, travanj 2002. piše:

> »Područje jadranskog bazena možemo u grubo podijeliti u tri geomorfološke cjeline. Sjeverni dio Jadrana je najplići, sa srednjom dubinom od oko 40 m koja se blago povećava u smjeru jugoistoka do izobate od 100 m. Srednji Jadran s prosječnom dubinom od 140 m proteže se do Palagruškog praga, a u sebi sadrži Jabučku kotlinu s dubinom od oko 200 m. Južni dio Jadrana je najdublji, a proteže se od Palagruškog praga do Otrantskih vrata koji povezuje Jadransko more s Jonskim i Sredozemnim morem. Karakterističan je po naglom porastu dubine od 150 m na svom gornjem dijelu na 1200 m u svom najdubljem sredinjem djelu.«



Slika 2.0.2: Batimetrija Jadranskog mora. Primjer skalarne funkcije u ravnini i predočavanja bojom.

Bliski razmještaj razinskih krivulja na području južnog Jadrana upućuje na spomenuti nagli porast dubine. Slika vrijedi 1000 riječi.

Još jedna vrsta prikaza skalarne funkcije u ravnini je prikaz u 3 dimenzije. Donosimo sljedeću sliku gdje su na dvije osi nanesene varijable domene (zemljopisna dužina i širina), a na trećoj osi nanesena je vrijednost funkcije dubine mora. Također, dubina je označena i bojom. Domena funkcije dubine na slikama 2 i 3 je područje Jadranskog mora $\mathfrak{J}$, odnosno:

$$\mathfrak{J} = \{(\lambda, \varphi) \,:\, (\lambda, \varphi) \text{ odgovara zemljopisnim koordinatama pozicije na Jadranskom moru}\}$$

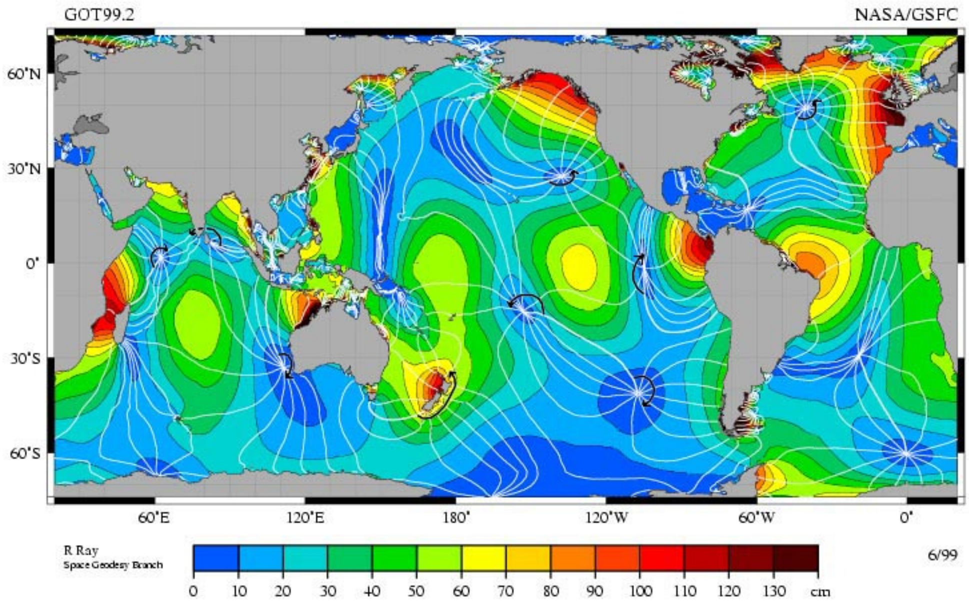
Funkcija d mjeri dubinu u metrima i zapisuje se kao

$$d \,:\, \mathfrak{J} \to \mathbb{R},$$

a njena kodomena je skup realnih vrijednosti između 0 i oko -1200, dakle d je ograničena funkcija. Minimum funkcije d (vrijednost oko -1200) je najdublja točka Jadranskog mora, a maksimum funkcije d (vrijednost 0) poprimaju sve točke uz obalu mora.

Zadatak za samostalan rad: amplituda morskih mijena

Pogledajte sliku 4. Pazite: na istoj slici oslikano je djelovanje dviju funkcija. Opišite funkcije prikazane na slici 4, njihovu domenu, kodomenu, maksimume, minimume i područja najvećeg gradijenta.



Slika 2.0.4: Amplituda glavne mjesečeve poludnevne komponente morske mijene označena je bojom. Bijelim linijama su označene krivulje sa istom fazom mijene u intervalima od 30° (oko 1 sat). Amfidromijske točke su tamno plava područja gdje se bijele linije spajaju.

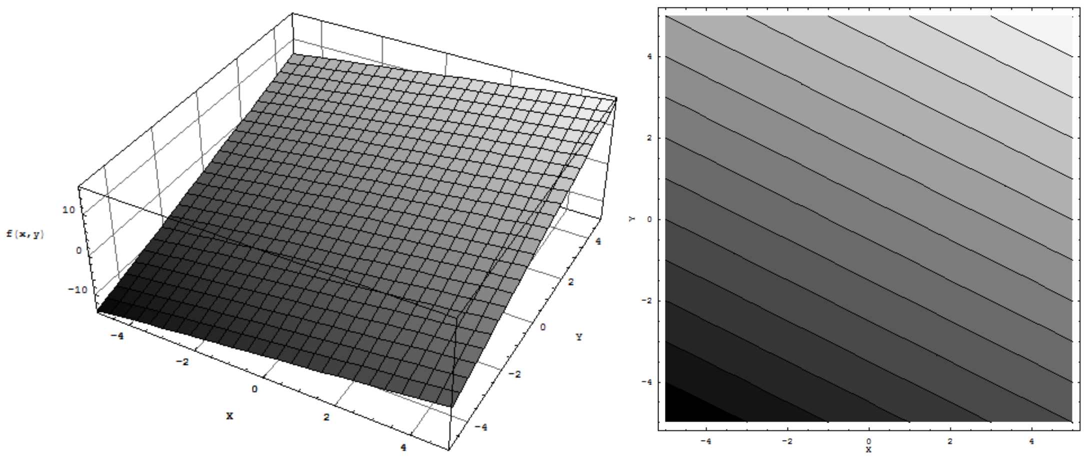
Ako imate poteškoća s prethodnim zadatkom potražite malu pomoć u fusnoti.[1]

[1] Na slici broj 4 bojom je prikazana razlika između plime i oseke, točnije amplituda glavne mjesečeve poludnevne komponente (M2) morske mijene. Crne linije su razinske krivulje ove funkcije. Amfidromijske točke su minimumi, a područja najveće morske mijene maksimumi. Uz navedeno, bijele linije su razinske krivulje druge funkcije koja daje vrijednost faze morske mijene. Morska mijena je u svojoj prirodi val, a svaki val je uz amplitudu karakteriziran još i periodom. Period glavne mjesečeve poludnevne komponente morske mijene je nešto više od 12 sati. Vrijednosti faze su između 0 i duljine perioda. Sve točke u istoj fazi titraju zajedno, ali svaka u svojoj vlastitoj amplitudi.

Dalje između ostalog donosimo nekoliko čestih skalarnih funkcija u ravnini čiji prikaz u 3 dimenzije određuje popularne geometrijske oblike. Nakon što obradimo odgovarajuće gradivo na svakom od sljedećih 5 primjera provedite postupak traženja lokalnih ekstrema.

Ravnina: $z = Ax + By + C$

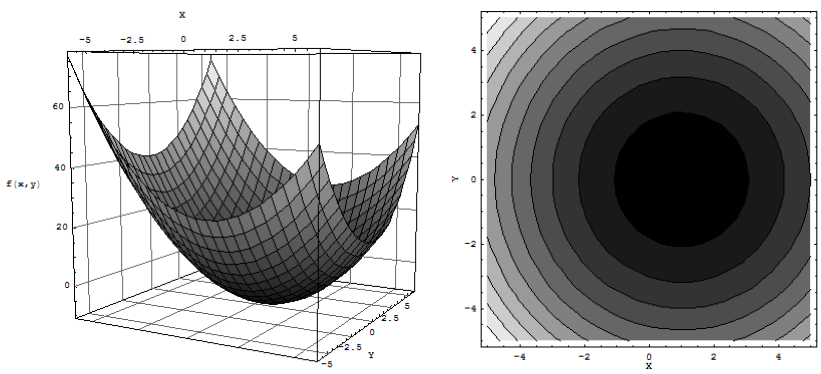
Ispitati funkciju $f(x, y) = x + 2y + 1$.



Slika 2.0.5: $f(x, y) = x + 2y + 1$

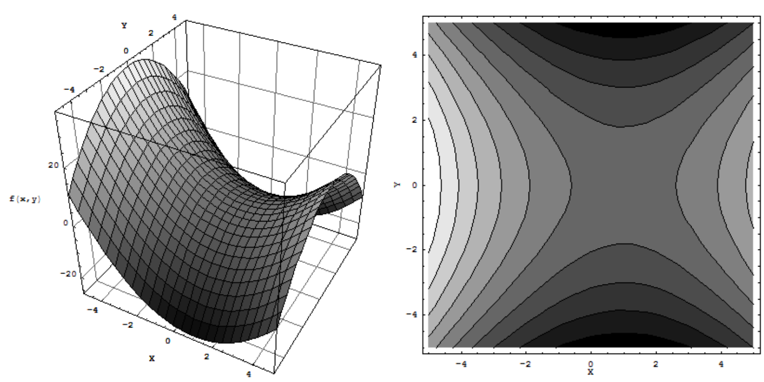
Paraboloid: $z - z_0 = \dfrac{(x - x_0)^2}{A} + \dfrac{(y - y_0)^2}{B}$

Ispitati funkciju $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 9$.



Slika 2.0.6: $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 9$

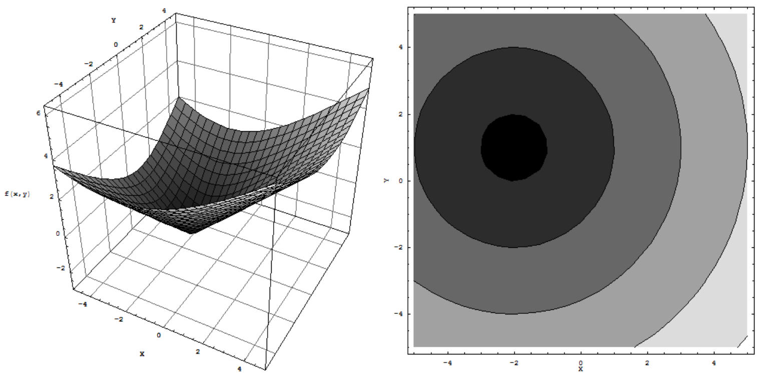
Ispitati funkciju $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$.



Slika 2.0.7: $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$

Stožac: $(z-z_0)^2 = \left(\frac{x-x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{B}\right)^2$

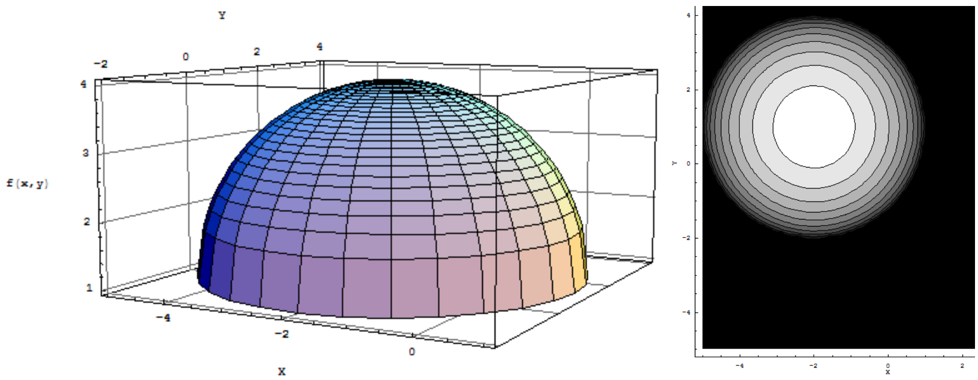
Ispitati funkciju $f(x,y) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} - 3$.



Slika 2.0.8: $f(x,y) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} - 3$

Elipsoid: $\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{B}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{C}\right)^2 = 1$

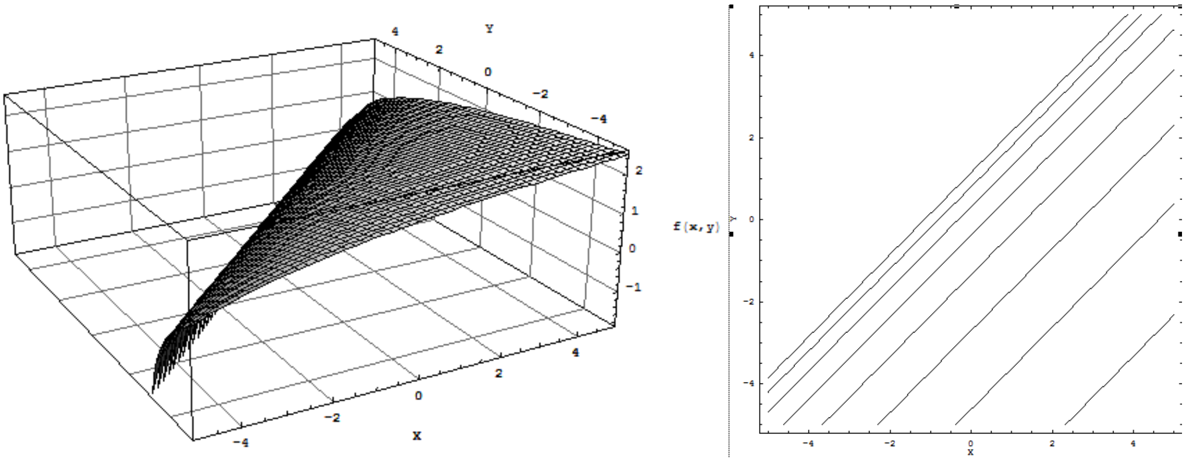
Zadana je funkcija $f(x,y) = \sqrt{9 - (x+2)^2 + (y-1)^2} + 1$. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje.



Slika 2.0.9: $f(x,y) = \sqrt{9 - (x+2)^2 + (y-1)^2} + 1$

Primjer $f(x,y) = \ln(x - y + 2)$

Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje.



Slika 2.0.10: $f(x,y) = \ln(x - y + 2)$

Zadatak za samostalan rad $f(x,y) = \ln(\dfrac{x}{y})$

Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje.

Limes (granična vrijednost) i neprekidnost

Točke u višedimenzionalnom prostoru označavati ćemo sa masnim slovima. Npr. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Sa $K(\mathbf{x}, \delta)$ označavamo kuglu oko točke $\mathbf{x}$ radijusa δ.

Definicija limesa funkcije. Skalarna funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ima limes L u točki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

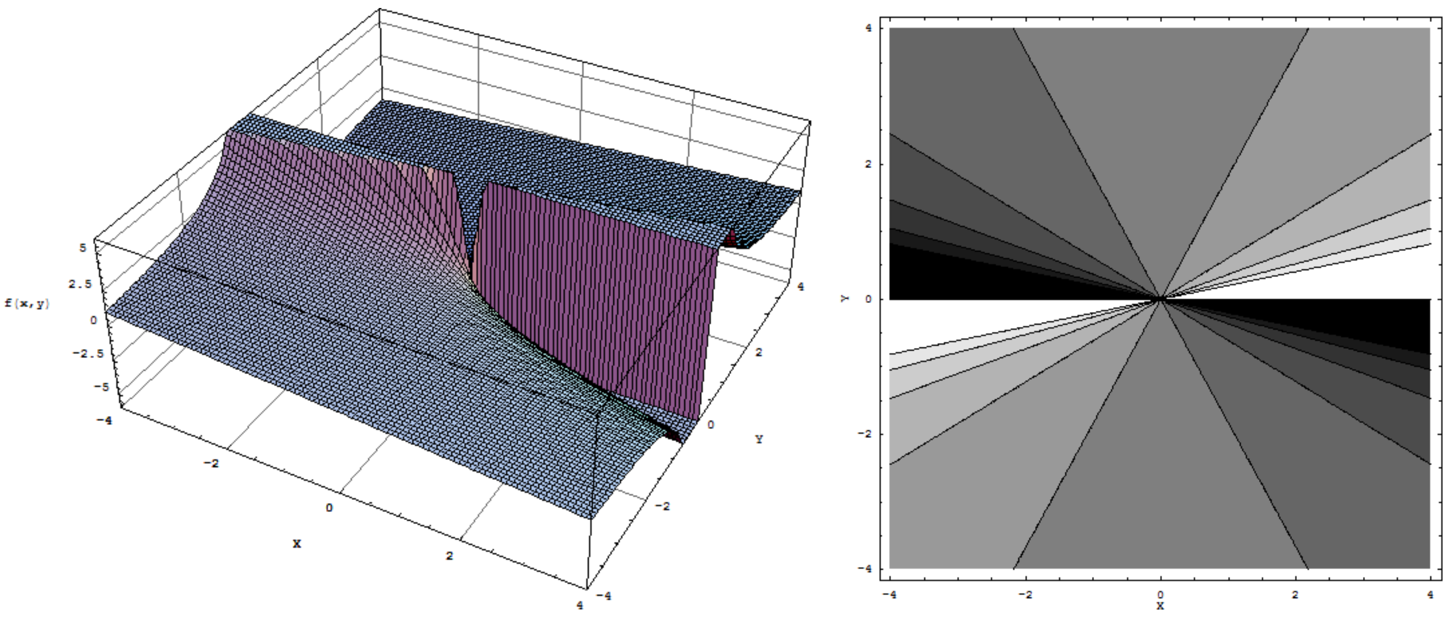
- ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $\mathbf{y} \in \Omega$ takav da $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ i $\mathbf{y} \in K(\mathbf{x}, \delta)$ vrijedi još i $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$,
- ako za svaki niz $\{\mathbf{y}_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega$ takav da $\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}$ vrijedi $f(\mathbf{y}_k) \to L$.

Posljedica: funkcija nema limes na mjestima gdje se dodiruju ili križaju dvije različite razinske krivulje (ili razinske plohe)!

Definicija neprekidnosti. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako u svakoj točki $\mathbf{x} \in \Omega$ postoji limes funkcije i jednak je $f(\mathbf{x})$.

Primjer $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

Odrediti domenu, kodomenu, razinske krivulje i limes u ishodištu (ako postoji).



Slika 2.0.11: $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Parcijalne derivacije prvog reda

Neka je zadana skalarna funkcija više varijabli $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada se parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x u točki $(x, y, z, \ldots)$ označava sa $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ili $\partial_x f$ i računa na način da se

- sve ostale varijable y, z, $\ldots$ osim varijable x smatra za konstante i
- izračuna derivacija funkcije jedne varijable $x \mapsto f(x, y, z, \ldots)$

Za druge varijable slično. Na primjer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (druga oznaka $\partial_y f$) se računa tako da se sve varijable osim y smatraju za konstante i formalno računa derivacija funkcije $y \mapsto f(x, y, z, \ldots)$.

Još jedna vrsta oznake za parcijalnu derivaciju je oznaka $\partial_k f$ koja označava parcijalnu derivaciju po k-toj varijabli, dakle sve varijable osim k-te se drže konstantama i računa se derivacija funkcije $x_k \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$

Ako postoje sve parcijalne derivacije prvog reda kažemo da je skalarna funkcija derivabilna.

Primjer. Izračunaj parcijalne derivacije prvog reda za $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

Zadatak. Izračunaj parcijalne derivacije prvog reda za $h(x, y, z) = z \cdot \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Zadatak za samostalan rad. Izračunaj parcijalne derivacije prvog reda za $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y})$ i $g(x,y) = \ln(x - y + 2)$.

Diferencijal i tangencijalna ravnina

TOTALNI DIFERENCIJAL (ili kraće DIFERENCIJAL) skalarne funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ u točki $T_0(x_0, y_0, \ldots)$ je izraz (linearni funkcional, matrica ili vektor)

$$\mathrm{d}f(T_0) \quad \equiv \quad \left[\frac{\partial f(T)}{\partial x} \; \frac{\partial f(T)}{\partial y} \; \ldots\right], \qquad \mathrm{d}f(T_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

koji aproksimira funkciju f u točki $T(x, y, \ldots)$ blizu točke T_0 na način da je

$$f(T) - f(T_0) \approx \underbrace{\mathrm{d}f(T_0)\ (T - T_0)}$$
$$= \left[\frac{\partial f(T)}{\partial x} \; \frac{\partial f(T)}{\partial y} \; \ldots\right] \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix},$$

štoviše mora vrijediti uvjet (detalje vidi u knjizi na str. 246):

$$\lim_{T \to T_0} \frac{f(T) - f(T_0) - \mathrm{d}f(T_0)\ (T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0. \tag{2.0.1}$$

Primjer. Izračunati diferencijal funkcije $f(x, y) = 5x^3y^2 - 9$ u točki $T(3, 1)$, izraziti ga u obliku matrice i pomoću njega aproksimirati funkciju f u blizini točke T.

Diferencijal se može zapisivati i u obliku diferencijalne forme:

$$\mathrm{d}f(T_0) = \frac{\partial f(T)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(T)}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \ldots$$

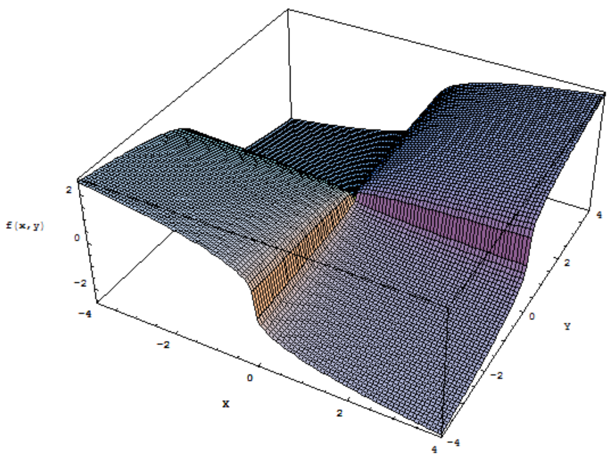
Primjer. Izračunati diferencijal funkcije $f(x, y) = x^2 \cos xy$ i prikazati ga u obliku diferencijalne forme.

Paziti: može se dogoditi da u točki postoje sve parcijalne derivacije, ali ne postoji diferencijal. Tada ne vrijedi gornja formula označena sa (2.0.1), odnosno parcijalne derivacije nisu neprekidne. Vidi primjer 5.2.4 u knjizi na strani 247. Treba znati da vrijedi:

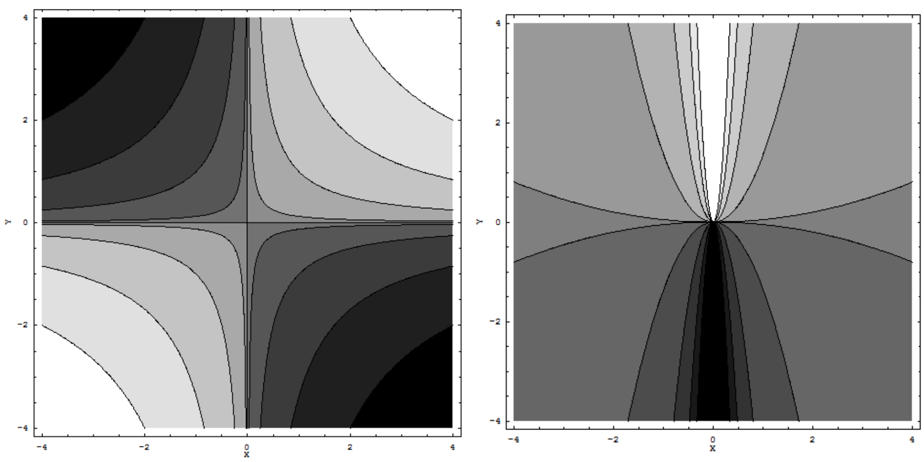
1. f je diferencijabilna u točki $T \Longrightarrow f$ je neprekidna u točki T,
2. f je diferencijabilna u točki $T \Longrightarrow$ sve parcijalne derivacije od f postoje u točki T,
3. sve parcijalne derivacije od f su neprekidne u točki $T \Longrightarrow f$ je diferencijabilna u točki T.

Primjer. Nacrtati razinske krivulje, odrediti domenu i kodomenu, ispitati neprekidnost, derivabilnost i diferencijal funkcije $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

Ovo je primjer funkcije koja u ishodištu nije derivabilna, pa dakle niti diferencijabilna.



Slika 2.0.12: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$



Slika 2.0.13: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ i derivacija $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$

Zadatak. Odrediti domenu, ispitati neprekidnost, derivabilnost i diferencijal funkcije
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Ovo je primjer funkcije koja je svuda neprekidna, svuda derivabilna, ali nije diferencijabilna u ishodištu.

Tangencijalna ravnina na graf funkcije u nekoj točki postoji kada postoji i diferencijal u toj točki. Jednadžba tangencijalne ravnine u točki $(T_0, f(T_0)) = (x_0, y_0, \ldots, t_0)$ usko je vezana uz diferencijal i glasi:

$$\begin{aligned} t - \underbrace{t_0}_{=f(T_0)} &= \mathrm{d}f(T_0)\,(T - T_0) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(T)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(T)}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primjer. Pronaći tangentu na graf funkcije $f(x) = x^2 + 3x + 1$ u točki grafa koja odgovara koordinati $x = -1$.

Primjer. Pronaći ravninu koja dira graf funkcije $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ povučenu u točki $(4, 1, z_0)$ tog grafa.

Zadatak. Izračunati tangencijalnu ravninu plohe $z = x^2 y$ u točki $(2, 1, 4)$.

Za samostalan rad:

1. Pronaći tangentu na graf funkcije $f(x) = 1 - x^2 - 2x$ u točki s koordinatom $x = 1$
2. Izračunati tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x,y) = 5x^3y^2 - 9$ u točki $T(3, 1, z_0)$.

Parcijalne derivacije drugog reda

Parcijalne derivacije drugog reda definiramo na osnovi parcijalnih derivacija prvog reda, tako da uzastopce parcijalno deriviramo po navedenim varijablama. Na primjer:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Koristimo skraćeni zapis: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$.
Koristimo skraćeni zapis: $\partial_{xy} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Vrijedi (Schwartz, vidi Teorem 5.2.4 knjiga str. 253): ako je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidna u okolini neke točke onda je u toj točki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Primjer. Izračunati sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$ i uvjeriti se u ispravnost Schwartzovog teorema.

Lokalni ekstremi skalarne funkcije

Definicije

- Lokalni maksimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz okoline točke T_0 vrijedi $f(T) \leq f(T_0)$.
- Globalni maksimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz domene funkcije vrijedi $f(T) \leq f(T_0)$.
- Lokalni minimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz okoline točke T_0 vrijedi $f(T) \geq f(T_0)$.
- Globalni minimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz domene funkcije vrijedi $f(T) \geq f(T_0)$.
- Lokalnim ekstremima nazivamo sve lokalne maksimume i minimume, a globalnim ekstremima sve globalne maksimume i minimume.
- T je stacionarna točka funkcije f ako je $\mathrm{d}f(T) = 0$, dakle sve parcijalne derivacije prvog reda u točki T su jednake nuli.

Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem (vidi Teorem 5.2.9 knjiga str. 263)
Neka skalarna funkcija f ima neprekidne sve parcijalne derivacije drugog reda u okolini stacionarne točke T. Tvorimo determinante redom

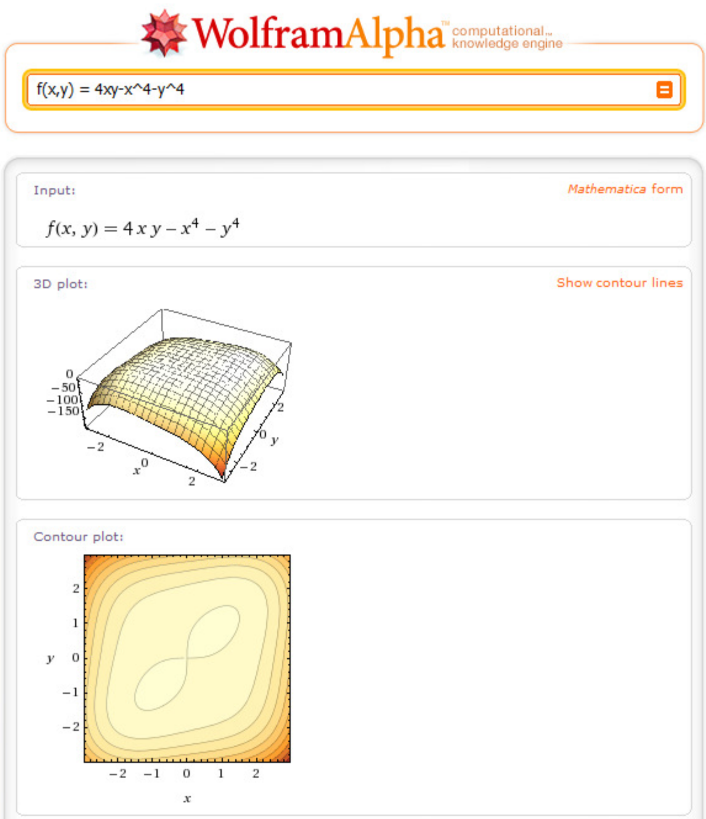
Ovo je važno!

$$\underbrace{|\partial_{xx}f(T)|}_{1.}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_{xx}f(T) & \partial_{xy}f(T) \\ \partial_{yx}f(T) & \partial_{yy}f(T) \end{vmatrix}}_{2.}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_{xx}f(T) & \partial_{xy}f(T) & \partial_{xz}f(T) \\ \partial_{yx}f(T) & \partial_{yy}f(T) & \partial_{yz}f(T) \\ \partial_{zx}f(T) & \partial_{zy}f(T) & \partial_{zz}f(T) \end{vmatrix}}_{3.}, \ldots$$

- ako su gornje determinante sve redom pozitivne tada f ima lokalni minimum u točki T,
- ako su neparne determinante u gornjem nizu negativne, a parne pozitivne tada f ima lokalni maksimum u točki T,
- ako je barem jedna parna determinante negativna ili ako su dvije neparne različitog predznaka tada f nema u točki T lokalni ekstrem već tzv. sedlastu točku,
- a u ostalim slučajevima ne možemo donijeti nikakav zaključak.

Primjer. Ispitati domenu, kodomenu, neprekidnost, derivabilnost, diferencijabilnost i ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Kada vježbate kod kuće možete se poslužiti alatom poput web stranice Wolfram Alpha.



Zadatak. Ispitati funkciju $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

Zadatak. Ispitati funkciju $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$.

Zadaci za samostalan rad:

1. Ispitati funkciju $f(x,y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$.
2. Ispitati funkciju $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$.
3. Ispitati funkciju $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$.
4. Ispitati funkciju $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

.

Slijedi komplementarni materijal autora Ivane Baranović i Miroslava Jerkovića. Potrebno je riješiti zadatak 3. Nije potrebno učiti primjer 4.

Poglavlje 1

Lokalni ekstremi funkcije više varijabla

Definicija 1.0.1 *Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima* ***lokalni maksimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni maksimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*
Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima ***lokalni minimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni minimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*
Lokalne minimume i maksimume funkcije f zovemo ***lokalni ekstremi*** *funkcije f, dok globalni minimum i maksimum funkcije f zovemo* ***globalni ekstremi*** *funkcije f.*

Ispitivanje lokalnih i globalnih ekstrema zadane funkcije jedan je od osnovnih zadataka u matematičkoj analizi. Kod funkcija dviju varijabli taj je postupak nešto složeniji nego kod funkcija jedne varijable i može se podijeliti u dva dijela.

Najprije dajemo tzv. **nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema**: ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako parcijalne derivacije prvog reda u toj točki postoje, onda mora vrijediti

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Napomena:

Nužni uvjet za postojanje lokalnog ekstrema u praksi ćemo čitati "unatraške": da bismo našli sve točke u kojima se s obzirom na gornji kriterij uopće može postići lokalni ekstrem, moramo riješiti sustav jednadžbi $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Točke koje zadovoljavaju ovaj sustav shvaćamo kao *kandidate* među kojima ćemo potom tražiti lokalne ekstreme.

Nakon što pronađemo sve točke-kandidate, prelazimo na utvrđivanje koje od navedenih točaka predstavljaju lokalni minimum ili maksimum. Da bismo to utvrdili, potrebno je izračunati vrijednosti drugih parcijalnih derivacija u točkama-kandidatima.

Za svaku pojedinu točku (x_0, y_0), kandidata za lokalni ekstrem, označimo:
$A := f_{xx}(x_0, y_0), \quad B := f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \quad C := f_{yy}(x_0, y_0).$
Dalje, označimo $\Delta := AC - B^2$
Vrijedi sljedeće **pravilo**:
Ako za točku (x_0, y_0) kandidata za lokalni ekstrem (točka zadovoljava nužan uvjet) vrijedi:

(1) $\Delta > 0$, onda se u (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:

   (a) lokalni maksimum ako je $A < 0$
   (b) lokalni minimum ako je $A > 0$

(2) $\Delta < 0$, onda f ne postiže ekstrem u (x_0, y_0), već je (x_0, y_0) tzv. sedlasta točka

(3) $\Delta = 0$, onda ne možemo izvući nikakav zaključak o tome ima li f u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili ne.

Napomena:
Slučaj (2) govori nešto više od same činjenice da u ispitivanoj točki funkcija ne postiže lokalni ekstrem. Naime, ako vrijedi $\Delta < 0$ u nekoj točki-kandidatu za lokalni ekstrem (x_0, y_0), onda u toj točki funkcija f ima tzv. *sedlo*, što je ekvivalent pojmu stacionarne točke kod funkcije jedne varijable. Naziv "sedlo" u ovom slučaju dobro dočarava izgled plohe funkcije f u okolini točke sedla.
Dalje, komentirajmo ukratko porijeklo veličine Δ. Vrijednosti parcijalnih derivacija u točki (x_0, y_0) mogu se organizirati u sljedeću matricu:
$$H := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$
pa vidimo da je $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, dakle upravo determinanta gornje matrice koju zovemo Hesseova matrica. Primijetimo da je $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ prema Schwarzovom teoremu, pa stoga na sporednoj dijagonali u Hesseovoj matrici imamo jednake vrijednosti koje u Δ čine faktor B^2.

Primjer 1 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.
Rješenje:
Najprije nalazimo prve parcijalne derivacije i rješavamo sustav $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:
$f_x(x, y) = 4y - 4x^3 = 0$
$f_y(x, y) = 4x - 4y^3 = 0.$
Imamo $y = x^3$, $x = y^3$. Uvrštanjem $y = x^3$ u drugu jednadžbu dobivao $x = x^9$, što faktoriziranjem postaje
$x(x^8 - 1) = 0$
$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$
$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$
$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

Zadnja dva faktora ne mogu biti jednaka nuli za realan x, pa nam ostaju tri rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Iz $y = x^3$ dobivamo $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, pa ukupno imamo tri točke kandidata za ekstrem: $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(-1, -1)$.

Za svaku od ovih točaka provodimo proceduru utvrđivanja koja od njih predstavlja lokalni ekstrem. Da bismo to izračunali, nađimo najprije druge parcijalne derivacije funkcije f:

$f_{xx}(x, y) = -12x^2$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4$
$f_{yy}(x, y) = -12y^2$.

Uvrštavanjem vrijednosti x i y koordinata u ove izraze dobivat ćemo za pojedine točke-kandidate vrijednosti za A, B i C, redom.

Računamo:

(a) točka $(0, 0)$:
$A = f_{xx}(0, 0) = 0$, $B = f_{xy}(0, 0) = 4$, $C = f_{yy}(0, 0) = 0$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$. Dakle, radi se o sedlastoj točki.

(b) točka $(1, 1)$:
$A = f_{xx}(1, 1) = -12$, $B = f_{xy}(1, 1) = 4$, $C = f_{yy}(1, 1) = -12$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = 128 > 0$. Dakle, u $(1, 1)$ postiže se lokalni ekstrem, i to maksimum, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(1, 1)$ iznosi $f(1, 1) = 2$.

(c) točka $(-1, -1)$:
$A = f_{xx}(-1, -1) = -12$, $B = f_{xy}(-1, -1) = 4$, $C = f_{yy}(-1, -1) = -12$,
pa je opet $\Delta = 128 > 0$ i radi se o točki lokalnog maksimuma jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(-1, -1)$ opet iznosi $f(-1, -1) = 2$.

Primjer 2 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = y \sin x$.

Rješenje:

Nužan uvjet za lokalne ekstreme daje sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = y \cos x &= 0 \\ f_y(x, y) = \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo za $\cos x$ vrijednost 1 ((za parne k) ili -1 (za neparne k), odakle nužno slijedi da je $y = 0$. Dakle, dobili smo beskonačno mnogo točaka kandidata za ekstrem oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Računamo sada parcijalne derivacije drugog reda:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -y \sin x \\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= \cos x \\ f_{yy}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti, ovisno o tome je li k paran ili neparan:

(a) k paran, tj. $k = 2l$ za $l \in \mathbb{Z}$:
$A = f_{xx}(2l\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}(2l\pi, 0) = \cos(2l\pi) = 1$, $C = f_{yy}(2l\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$, što znači da se su $(k\pi, 0)$, k paran, sedlaste točke

(b) k neparan, tj. $k = 2l + 1$ za $l \in \mathbb{Z}$: slično kao gore, imamo:
$A = f_{xx}((2l+1)\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}((2l+1)\pi, 0) = \cos((2l+1)\pi) = -1$, $C = f_{yy}((2l+1)\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - (-1)^2 = -1 < 0$, pa i u $(k\pi, 0)$, k paran, imamo sedlo.

Konačno, vidimo da ova funkcija nema niti jednu točku u svojoj domeni u kojoj se postiže lokalni ekstrem, već samo beskonačno mnogo sedlastih točaka (i sve su one oblika $(k\pi, 0)$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 3 Odredite lokalne ekstreme funkcije:

(1) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

(2) $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

(3) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

(4) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

(5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

(6) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

(7) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

(8) $f(x, y) = xe^y$

(9) $f(x, y) = e^x \sin y$

(10) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Nešto drugačije postupamo ako je funkcija zadana implicitno (u osnovi samo stoga što je formula za nalaženje parcijalnih derivacija prvog reda u tom slučaju definirana drugačije – vidjeti vježbe vezane uz 7. lekciju!).

Primjer 4 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$.

Rješenje:

Definiramo $F(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$ i računamo:

$F_x(x, y, z) = 2x + z$

$F_y(x, y, z) = 4y$

$F_z(x, y, z) = x + 2z$.

Stoga je $z_x(x, y) = -\frac{2x+z}{x+2z}$, a $z_y(x, y) = -\frac{4y}{x+2z}$. Da bismo našli kandidate za lokalne ekstreme, moramo riješiti sustav $z_x(x, y) = z_y(x, y) = 0$, tj. $2x + z = 0 = 4y$. Dobivamo $y = 0$ i $z = -2x$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$ daje $x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ ili $x_2 = -1$, pa je $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Imamo dvije točke koje su kandidati za ekstrem: $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Chapter 3

Obične diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba je vrsta jednadžbe u kojoj je nepoznanica funkcija i u takvoj jednadžbi javlja se i neka derivacija (nepoznate) funkcije. Uz diferencijalnu jednadžbu često dolaze još neki dodatni uvjeti koje tražena funkcija treba zadovoljiti. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja zadovoljava zadanu diferencijalnu jednadžbu i postavljene dodatne uvjete. Štoviše, rješenja diferencijalnih jednadžbi možemo općenitije promatrati kao krivulje. Zbog toga se kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi ne treba brinuti ako kao rješenje dobijemo krivulju koja ne može biti graf funkcije, na primjer zato što vertikalni pravac siječe tu krivulju u više točaka.

Primjer. Provjeriti da funkcija $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' + y = 0$.

Zadatak. Provjeriti da funkcija $f(x) = x\mathrm{e}^x$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' + y = 0$ i početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.

Očito, istu diferencijalnu jednadžbu mogu zadovoljavati mnoge različite funkcije. Grafovi svih funkcija koje zadovoljavaju neku diferencijalnu jednadžbu nazivaju se <u>integralne krivulje</u>.

Primjer. Zadana je porodica krivulja $y(x) = C_1 (x - C_2)^2$. Skiciraj tu porodicu krivulja. Odredi diferencijalnu jednadžbu[1] koju zadovoljava ta porodica krivulja.

[1]Diferencijalnu jednadžbu nalazimo tako da jednadžbu zadane porodice deriviramo dok ne dođemo u mogućnost konstante izraziti preko x, y, y', y'', ... Zatim tako izražene konstante uvrstimo u polaznu jednadžbu porodice krivulja.

.

Diferencijalne jednadžbe karakterizirane su nečim što se naziva red diferencijalne jednadžbe. To je broj najveće derivacije koja se u diferencijalnoj jednadžbi pojavljuje. Na primjer, sve dosad spomenute diferencijalne jednadžbe su bile reda 2 jer je u svima najveća derivacija koja se pojavljuje druga derivacija.

Sve diferencijalne jednadžbe koje ćemo promatrati spadaju u skupinu običnih diferencijalnih jednadžbi. Obične diferencijalne jednadžbe su diferencijalne jednadžbe kojima je nepoznanica funkcija samo jedne varijable.

Neke vrste običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Materijal koji sljedi preuzet je od autora Ivane Baranović i Miroslava Jerkovića s Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije. Samo se mali broj diferencijalnih jednadžbi do danas uspjelo riješiti. Nezgoda je da se gotovo svaki malkice drugačiji tip diferencijalne jednadžbe treba riješavati na različiti način. Zbog toga u materijalima koji slijede obrađujemo samo nekoliko najosnovnijih tipova diferencijalnih jednadžbi. Treba riješiti zadatke u materijalima koji slijede.

Obične diferencijalne jednadžbe

Uvodni pojmovi

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe oblika:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

(ovdje je $y = y(x)$), dakle one koje sadrže osim same funkcije $y(x)$ i njezine derivacije.

Primjer 1 Dane su diferencijalne jednadžbe prvog, drugog i četvrtog reda:

a) $y' + 2xy - y^3 = 0$,

b) $xy'' + \frac{x}{\ln y} - 2\sin x = 0$,

c) $y^{(4)} - 2y'' + \sqrt{y + 3x} = 0$.

Iz primjera je jasno da je red diferencijalne jednadžbe jednak najvećem stupnju derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Neka funkcija predstavlja rješenje diferencijalne jednadžbe ako ju zadovoljava, tj. ako kad uvrstimo odgvarajuće parametre s lijeve strane (1) s desne zaista dobijemo nulu.

Primjer 2 Provjerite da je funkcija $y(x) = 5x^2$ rješenje sljedeće diferencijalne jednadžbe: $xy' = 2y$.

Rješenje: Imamo $xy' - 2y = 0$. U našem primjeru je $y'(x) = 10x$. Sada uvrštavamo naše funkcije u jednadžbu:

$$xy' - 2y = x \cdot 10x - 2 \cdot 5x^2 = 10x^2 - 10x^2 = 0$$

pa je $y = 5x^2$ zaista rješenje dane dif. jednadžbe.

Zadatak 1 Provjerite da li su navedene funkcije rješenja zadanih dif. jednadžbi:

a) $y'' = y^2 + x^2$, $y(x) = \frac{1}{x}$,

b) $y'' + y = 0$, $y(x) = 3\sin x - 4\cos x$,

c) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = x^2e^x$

d) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y(x) = \frac{C^2 - x^2}{2x}$

Napomena: Kao i uvijek, vrijedi $y' = \frac{dy}{dx}$ i to tako shvaćamo pa je npr $y' + x^2 = y$ isto što i $dy + x^2dx = ydx$.

Ako je zadana neka diferencijalna jednadžba, grafove njenih rješenja nazivamo **integralnim krivuljama**. Ponekad su zadane porodice krivulja i zanima nas koja je njihova pripadna dif. jednadžba. Nju nalazimo tako da jednadžbu zadane porodice deriviramo dok ne dođemo u mogućnost konstante izrazimo preko $x, y, y', y'', \ldots$ i time jednadžba familije krivulja postane oblika (1). Dakle, moramo derivirati onoliko puta koliko imamo nezavisnih konstanti.

Primjer 3 Nađite diferencijalnu jednadžbu porodice parabola zadane s $y(x) = Cx^2$. Skicirajte tu porodicu.

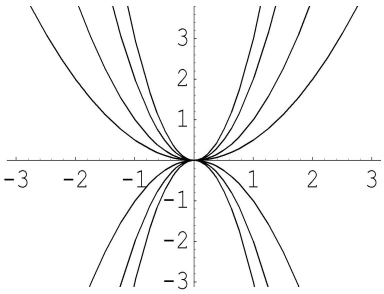
Rješenje: Tražimo prvo dif. jednadžbu, deriviramo jedanput (jer je jedna konstanta) pa imamo:

$$y'(x) = 2Cx \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y'}{2x}$$

Sada to uvrštavamo u početnu jednadžbu naših krivulja da se riješimo konstante i dobivamo izraz:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y'x}{2}$$

što je tražena diferencijalna jednadžba te familije krivulja. Riječ je očito o svim parabolama s tjemenom u ishodištu:



Zadatak 2 Odredite diferencijalne jednadžbe sljedećih familija krivulja i skicirajte te familije:

a) $y(x) = Cx$,

b) $y(x) = C_1(x - C_2)^2$,

c) $y(x) = Ce^x$,

d) $x^2 + y^2 = C$.

Separacija varijabli, homogene jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe rješavaju se različitim metodama. Mi ćemo raditi samo one najjednostavnije. Većini tih metoda cilj je diferencijalnu jednadžbu na ovaj ili onaj način (npr supstitucijom) svesti na oblik koji zovemo: **diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama**. Taj oblik znamo direktno riješiti. Naime, kod separiranih varijabli imamo situaciju da se jednadžba može zapisati ovako:

$$y' = g(y)f(x)$$

gdje funkcija g ima za varijablu samo y, a funckija f samo x (otuda i naziv "separirane varijable"). Sada $g(y)$ prebacujemo na suprotnu stranu a y' zapišemo kao $\frac{dy}{dx}$ i dobivamo:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zadnju jednakost možemo sada integrirati i dobiti rješenje.

Primjer 4 Riješite diferencijalnu jednadžbu: $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje: To je očito slučaj separiranih varijabli, imamo:

$$xyy' = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

pa je $g(y) = \frac{1}{y}$ a $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$. Prebacujemo g na suprotnu stranu i integriramo:

$$ydy = \frac{1 - x^2}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int ydy = \int \frac{1 - x^2}{x} dx.$$

Riješimo integrale i dobivamo:

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Obično rješenja i ostavljamo u ovakvom implicitnom obliku jer je eksplicitni oblik ponekad nemoguće dobiti. Rješenje koje je u implicitnom obliku nazivamo još i **integralom jednadžbe**. Gornja konstanta C upućuje na to da imamo čitavu familiju rješenja ustvari. Njihovi grafovi daju gore spomenute familije integralnih krivulja.

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama:

a) $xy' - y = y^3$,

b) $y' = -\frac{y}{x}$,

c) $y' \sin x = y \ln y$,

d) $(\tan x)dy - ydx = 0$.

Kao što vidimo, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda nisu jedinstvena već imamo jednu proizvoljnu konstantu (vidi i kod integralnih krivulja, dobijemo čitavu porodicu njih). Ako uzmemo jednadžbu drugog reda, dobit ćemo dvije proizvoljne konstante, za onu trećeg reda tri itd. Stoga rješenja dif. jednadžbe zovemo i **općim rješenjem**. Ako želimo jedinstveno rješenje, moramo dodati neke zahtjeve kao što su vrijednosti rješenja $y = y(x)$ (ili neke njegove derivacije) u nekoj specijalnoj točki. Da bi imali jedinstveno rješenje, tih uvjeta mora biti koliki je stupanj jednadžbe i oni se zovu **početni uvjeti**. Rješenje koje njih zadovoljava zove se **partikularno rješenje**.

Primjer 5 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete: $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x, \;\; y(0) = 1$.

Rješenje: Rješavamo prvo zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{e^x}{1 + e^x}$$

pa slijedi:

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Koristimo početni uvjet da odredimo konstantu C:

$$\frac{1}{2} = \frac{y^2(0)}{2} = \ln(1 + e^0) + C = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2$$

i traženo partikularno rješenje je:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Zadatak 4 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete:

a) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \; y(0) = 1,$

b) $y' \sin x = y \ln y, \; y(\frac{\pi}{2}) = 1,$

c) $y' = -\frac{y}{x}, \; y(1) = 2.$

Prijeđimo sada na novu grupu jednadžbi kao primjer jednadžbi koje se jednostavnom supstitucijom svode na jednandžbe sa separiranim varijablama: **homogene diferencijalne jednadžbe**. To su one jednadžbe koje možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Supstitucija je $y = u \cdot x$ gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija i onda imamo $y' = u' \cdot x + u$.

Primjer 6 Nađite opće rješenje jednadžbe $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje: Očito je riječ o homogenoj jednadžbi (2) gdje je $f(t) = t - 1$. Uvodimo supstituciju $y = ux$ i dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x}$$

odnosno

$$\int du = -\int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow u = -\ln x + \ln C.$$

Sada je $y = u \cdot x = (-\ln x + \ln C)x = x \ln \frac{C}{x}$.

Primjer 7 Za jednadžbu $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ nađite porodicu integralnih krivulja i izdvojite one krivulje koje prolaze kroz točku $(4, 0)$ odnosno $(1, 1)$.

Rješenje: Imamo:

$$(x^2 + y^2)dx = 2xydy \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

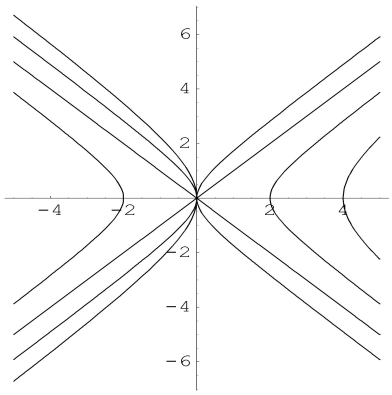
To je homogena jednadžba (2) za $f(t) = \frac{1}{2}(t^{-1} + t)$. Supstitucija $y = u \cdot x$ nam daje:

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - u^2}{u}.$$

Stoga imamo:

$$\int \frac{u}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \ln(1-u^2) = \frac{1}{2} \ln x - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln(1-u^2) = -\ln(x) + \ln C$$

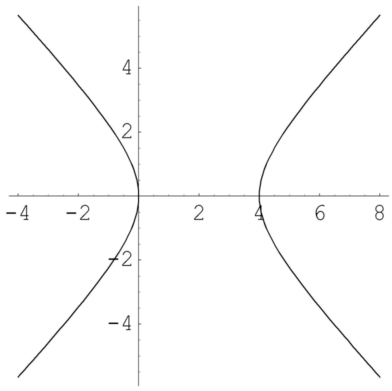
pa je $1 - \frac{C}{x} = u^2$ što daje: $\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 - Cx$. Jer je C proizvoljna konstanta, možemo to zapisati i ovako: $y^2 = x^2 - 2Cx \quad \Rightarrow \quad (x-C)^2 - y^2 = C^2$. Integralne krivulje su očito hiperbole:



Nađimo sada integralnu krivulju koja prolazi točkom $(4,0)$. To je ustvari graf rješenjak koje zadovoljava početni uvjet $y(4) = 0$. Kad to uvrstimo u opće rješenje dobivamo:

$$(4-C)^2 - y^2(4) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (4-C)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad 16 - 8C = 0$$

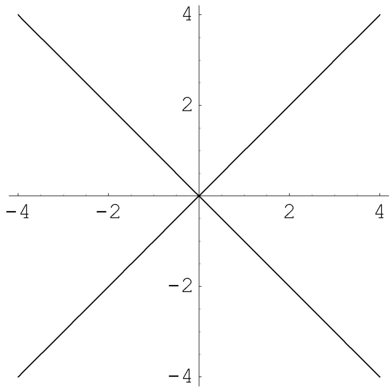
što znači da je $C = 2$, odnosno riječ je o hiperboli $(x-2)^2 - y^2 = 4$:



Drugi početni uvjet nam daje $y(1) = 1$ pa za konstantu C dobivamo:

$$(1-C)^2 - y^2(1) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (1-C)^2 - 1 = C^2$$

iz čega slijedi $C = 0$. Ovaj put dobivamo $x^2 - y^2 = 0$ degeneriranu hiperbolu, što su ustvari pravci $y = \pm x$:



Zadatak 5 Integrirajte diferencijalne jednadžbe:

a) $y' = -\frac{x+y}{x}$,

b) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$,

c) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$,

d) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

nazivamo linearnom (jer sadrži samo y i y' a ne i neke druge članove kao npr y^2 ili $\sin y$). Da bi njih riješili koristit ćemo novu metodu koju nazivamo **metoda varijacije konstanti**. Ona se bazira na sljedećem:

1) riješimo prvo pripadnu homogenu jednadžbu odnosno

$$y' + P(x)y = 0.$$

Kao što vidimo, to je slučaj varijable sa separiranim varijablama pa dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int P(x)dx + \ln C.$$

Stoga je rješenje homognene jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dy}. \tag{4}$$

2) Rješenju homogene jednadžbe moramo nekako dati slobodu mijenjanja da ga možemo prilagoditi nehomogenoj jednadžbi. Pošto je jedino C u (4) proizvoljan, od njega napravimo funkciju $C(x)$ pa ćemo rješenje nehomogene tražiti u obliku $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Želimo da ono zadovoljava (3) pa nam treba i njegova derivacija:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Uvrstimo dobiveno u (3) i imamo:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

i iz toga lako izračunamo integriranjem traženi $C(x)$ koji potom uvrstimo u $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ i dobijemo rješenje nehomogene jednadžbe.

Primjer 8 Nađite opći integral jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x$.

Rješenje: Ovdje je očito $P(x) = -\frac{1}{x}$ a $Q(x) = x$. Sprovodimo gornji postupak:

1) pripadna homogena jednadžba je:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

što daje

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot x.$$

2) konstanta C postaje funkcija pa rješenje nehomogene tražimo u obliku $y = C(x)x$. Deriviranje daje $y' = C'(x)x + C(x)$ pa iz uvrštavanja y i y' u $y' - \frac{y}{x} = x$ dobivamo:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x \quad \Rightarrow \quad C'(x)x = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1$$

i očito je $C(x) = x + D$ pa je konačno rješenje $y = x(x + D)$.

Primjer 9 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće uvjete: $xy' + y - e^x = 0, \;\; y(a) = b$.

Rješenje: Prvo jednadžbu prebacujemo u oblik (3) da prepoznamo $P(x)$ i $Q(x)$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{x},\; Q(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Sada je pripadna homogena jednadžba $y' + \frac{y}{x} = 0$ i njeno rješenje je:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Prema tome, rješenje nehomogene tražimo u obliku: $y = \frac{C(x)}{x}$ i onda je $y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$. Uvrštavamo to u početnu jednadžbu i slijedi:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^x$$

pa je konačno opće rješenje $y = \frac{e^x + D}{x}$. Ostaje naći partikularno tj. odrediti konstantu D iz uvjeta $y(a) = b$. Imamo

$$b = y(a) = \frac{e^a + D}{a} \quad \Rightarrow \quad D = ab - e^a$$

i partikularno rješenje je $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$.

Zadatak 6 Nađite opća rješenja jednadžbi:

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$,

2) $y' - y \tan x = \cos x$,

3) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$.

Zadatak 7 Nađite partikularna rješenja jednadžbi koja zadovoljavaju navedeni uvjet:

1) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x, \ \ y(0) = 0$,

2) $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \ \ y(0) = 0$.

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovoj lekciji vježbamo rješavanje jedne klase običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda − radi se o **linearnim** običnim diferencijalnim jednadžbama 2. reda **s konstantnim koeficijentima**. To su jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi, a $f(x)$ neka funkcija varijable x. Nepoznanica ove jednadžbe je $y = y(x)$, a riješiti jednadžbu znači dobiti eksplicitan izraz za funkciju y.

Kao i inače, razlikujemo dvije situacije:

(a) Ako je $f(x) = 0$, gornja jednadžba ima oblik

$$y'' + py' + qy = 0$$

i zovemo je **homogena** jednadžba.

(b) Ako je $f(x) \neq 0$, gornja jednadžba ima općeniti oblik (gdje je s desne strane neka nenul funkcija varijable x). U tom slučaju jednadžbu zovemo **nehomogena** jednadžba.

U sljedećem odlomku opisujemo kako se rješavaju homogene jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Homogene jednadžbe

Homogene jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = 0$$

rješavaju se pomoću tzv. **karakteristične jednadžbe**, koju iz diferencijalne jednadžbe dobijemo uvođenjem parametra λ po sljedećem principu

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & 1 \\ y' & \rightarrow & \lambda \\ y'' & \rightarrow & \lambda^2. \end{array}$$

Tako gornjoj jednadžbi pripada sljedeća karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Kao i kod svake kvadratne jednadžbe, njena rješenja $\lambda_{1,2}$ mogu biti:

(a) realni i različiti brojevi $-$ u tom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$
gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

(b) realni i jednaki brojevi ($\lambda_1 = \lambda_2$) $-$ ovdje je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s
$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(c) kompleksni brojevi $-$ u tom slučaju vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, jer znamo da su kompleksna rješenja kvadratne jednadžbe međusobno konjugirana. U ovom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s
$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 1 Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba koja pripada ovoj diferencijalnoj jednadžbi glasi
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$
a njena su rješenja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Kako su rješenja različiti realni brojevi, imamo da je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2 Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Rješenje: U ovom slučaju karakteristična jednadžba glasi
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$
Njeni korijeni su jednaki realni brojevi $\lambda_{1,2} = -2$, pa rješenje glasi
$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3 Riješite
$$y'' + y = 0.$$

Rješenje: Ovoj jednadžbi pripada karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa vidimo da je $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (to su realni i imaginarni dio jednog od ovih korijena!). Stoga je rješenje dano s

$$y(x) = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 1 \cdot x + C_2 \sin 1 \cdot x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Napomena:

Ako želimo zadati Cauchyjev problem (diferencijalna jednadžba s jednim ili više početnih uvjeta) čija je diferencijalna jednadžba drugog reda, prirodno je zadati ne jedan (kao što je to bilo kod običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda), već **dva** početna uvjeta. Naime, vidimo već iz gore opisanih rješenja da postoje dvije neodređene realne konstante C_1 i C_2. Tek zadavanjem **dva** početna uvjeta dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, čijim rješavanjem potom u potpunosti fiksiramo konstante C_1 i C_2, tj. dolazimo do jedinstvenog rješenja. Najčešće se ti početni uvjeti odnose na neke vrijednosti same funkcije i njene prve derivacije.

Primjer 4 Riješite sljedeći Cauchyjev problem (nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava zadane početne uvjete):

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje: Najprije rješavamo diferencijalnu jednadžbu. Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

a rješenja te jednadžbe dana su s $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili partikularno rješenje, koristimo početne uvjete:

$$\begin{aligned} y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = -2C_1 - C_2 = -1. \end{aligned}$$

Dolazimo do sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - C_2 &= -1, \end{aligned}$$

odakle izlazi $C_1 = 0, C_2 = 1$. Uvrštavanjem u opće rješenje dolazimo do partikularnog rješenja (rješenja zadanog Cauchyjevog problema):

$$y(x) = e^{-x}.$$

Zadatak 1 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$

3) $y'' + y' - y = 0$

4) $y'' - 2y' + 5y = 0$

5) $y'' - 9y' + 9y = 0$

6) $y'' - y = 0$.

Zadatak 2 Odredite partikularna rješenja sljedeći diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

2) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

3) $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0$.

Nehomogene jednadžbe

Rješenje nehomogenih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

dano je s

$$y = y_0 + Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je neko (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe, koje u ovisnosti od oblika funkcije $f(x)$ tražimo u sljedećem obliku:

(1) Ako je $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja:

   i) u slučaju da a nije rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ neki polinom s neodređenim koeficijentima

   ii) u slučaju da a jest rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, gdje je r kartnost a kao korijena karakteristične jednadžbe (broj koliko se puta a pojavljuje kao rješenje te jednadžbe $-$ to može biti 1 ili 2), a $Q_n(x)$ je neki polinom s neodređenim koeficijentima

(2) Ako je $f(x) = e^{ax} \cdot [P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja, a $Q_m(x)$ polinom $m-$tog stupnja:

   i) u slučaju da $a \pm bi$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da $a \pm bi$ jesu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = xe^{ax} \cdot [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima.

Napomena:

Gornja situacija pokriva mnogo mogućnosti za $f(x)$, i to kada je f umnožak eksponencijalne funkcije i polinoma ili umnožak eksponencijalne funkcije i linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija s polinomima kao koeficijentima. Kako prepoznati radi li se o prvom ili drugom slučaju? Najjednostavnije je vidjeti sadrži li $f(x)$ neke trigonometrijske funkcije $-$ ako sadrži, znači da je riječ o slučaju (2) opisanom gore.

Nakon što utvrdimo oblik funkcije Y, uvrštavamo Y (i sve njene derivacije koje treba) u polaznu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu te potom određujemo nepoznate koeficijente u polinomu (ili polinomima) koji se u Y pojavljuju.

Primjer 5 Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}.$$

Rješenje:

Najprije nalazimo y_0, tj. opće rješenje pripadne homogene jednadžbe. Ona glasi

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

pa je njena karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -1$, pa je opće rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada prelazimo na traženje partikularnog rješenja, tj. Y. Kako je $f(x) = e^{2x}$, što možemo u "punom" obliku situacije (1) s prethodne stranice shvatiti kao $f(x) = e^{2 \cdot x} \cdot 1$, vidimo da je $a = 2$, $P(x) = 1$. Kako $a = 2$ nije rješenje gornje karakteristične jednadžbe, Y tražimo u obliku

$$Y = A \cdot e^{2x},$$

gdje je $Q(x) = A$, tj. konstantan polinom. Konstantu A određujemo uvrštavanjem Y u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Kako ta diferencijalna jednadžba sadrži y' i y'', moramo najprije izračunati Y' i Y'':

$$\begin{aligned} Y' &= 2Ae^{2x} \\ Y'' &= 4Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y, Y' i Y'' u polaznu jednadžbu dobivamo

$$4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 9Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s e^{2x} slijedi da je $9A = 1$, tj. $A = \frac{1}{9}$, pa je

$$Y = \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Sada slijedi da je rješenje dane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 6 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = x^2 e^x.$$

Rješenje:

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je

$$y_0 = e^{0\cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prelazimo na određivanje oblika partikularnog rješenja Y. Kako je $f(x) = x^2 e^x$, a $a = 1$ nije korijen karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

gdje su A, B i C koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu. Računamo

$$\begin{aligned}
Y' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x \\
Y'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x = \\
&= (Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x,
\end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = x^2 e^x.$$

Sada dijeljenjem s e^x i grupiranjem po potencijama od x dolazimo do jednakosti polinoma drugog stupnja

$$2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2,$$

što uspoređivanjem koeficijenata (uz odgovarajuće potencije od x moraju stajati isti koeficijenti kako bi polinomi bili jednaki!) lijeve i desne strane gornje jednakosti vodi na sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned}
2A &= 1 \\
4A + 2B &= 0 \\
A + B + C &= 0.
\end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje koje glasi $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, pa je

$$Y = (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x$$

i stoga je konačno rješenje zadatka dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y = \sin x.$$

Rješenje:

Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 1 = 0$ pripadne homogene jednadžbe $y'' - y = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe dano s

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.$$

Kako je $f(x) = \sin x = e^{0 \cdot x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, imamo $a = 0$, $b = 1$. Kako $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni gornje karakteristične jednadžbe, to partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = e^{0 \cdot x}(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = A \cos x + B \sin x,$$

gdje su A i B konstantni polinomi koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Računamo stoga

$$\begin{aligned} Y' &= -A \sin x + B \cos x \\ Y'' &= -A \cos x - B \sin x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - (A \cos x + B \sin x) &= \sin x \\ -2A \cos x - 2B \sin x &= \sin x. \end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i desne strane gornje jednakosti (s desne strane uz $\cos x$ stoji nula!) imamo

$$\begin{aligned} -2A &= 0 \\ -2B &= 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Stoga je

$$Y = -\frac{1}{2} \sin x,$$

pa je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Primjer 8 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 4y = (25x + 5) \cos x.$$

Rješenje:

Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 4y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 4 = 0$ ima dva različita realna rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2$, pa opće rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili oblik u kojem ćemo tražiti partikularno rješenje Y, potrebno je uočiti da $f(x) = (25x+5)\cos x$ sadrži trigonometrijsku funkciju, točnije da $f(x)$ možemo shvatiti kao $f(x) = e^{0\cdot x}((25x+5)\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$, pa prema situaciji opisanoj pod (2) na str. 4 vidimo da (jer $a \pm bi = 0 \pm 1\cdot i = \pm i$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe) Y treba tražiti u obliku

$$Y = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

(primijetimo da su nepoznati polinomi uz $\cos x$ i $\sin x$ ovdje **istog** stupnja, i to maksimalnog stupnja od polinoma koji se javljaju u $f(x)$). Sada još treba izračunati Y'':

$$\begin{aligned}
Y' &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\
&= (Cx+A+D)\cos x + (-Ax-B+C)\sin x \\
Y'' &= C\cos x - (Cx+A+D)\sin x - A\sin x + (-Ax-B+C)\cos x = \\
&= (-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x.
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x - 4((Ax+B)\cos x + (Cx+D)) = (25x+5)\cos x,$$

odakle grupiranjem po $\cos x$ i $\sin x$ imamo

$$(-5Ax-5B+2C)\cos x + (5Cx+5D+2A)\sin x = (25x+5)\cos x.$$

Sada izjednačavanjem polinoma uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i s desne strane gornje jednakosti (uz $\sin x$ s desne strane stoji nulpolinom!) imamo

$$\begin{aligned}
-5Ax-5B+2C &= 25x+5 \\
5Cx+5D+2A &= 0,
\end{aligned}$$

odakle pak izjednačavanjem koeficijenata uz potencije x dolazimo do sustava

$$\begin{aligned}
-5A &= 25 \\
-5B+2C &= 5 \\
5C &= 0 \\
5D+2A &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava je jedinstveno i glasi $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, pa je partikularno rješenje dano s

$$Y = (-5x-1)\cos x + 2\sin x.$$

Stoga je rješenje polazne diferencijalne jednadžbe

$$y = y_0 + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (-5x-1)\cos x + 2\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

2) $y'' - 8y' + 7y = 14$

3) $y'' - y = e^x$

4) $y'' + y = \cos x$

5) $y'' + y' - 2y8\sin 2x$

6) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$