Poglavlje 1

Integriranje

Zbrajanje

Konačno zbrajanje i znak $\sum$

$$\sum_{n=1}^{6} n^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{6} n^2 = \displaystyle\sum_{1\le n\le 6} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91$$

$$\sum_{k=0}^{5} k! = 0!+1!+2!+3!+4!+5! = 1+1+2+6+24+120 = 154$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1\cdot 2 = 2$
$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$
$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot$

Neka je $f(x) = \sin(x)$. Računaj:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} f\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sum_{k=0}^{6} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{=\frac{\sqrt3}{2}} + \underbrace{\sin\frac{2\pi}{3}}_{=\frac{\sqrt3}{2}} + \underbrace{\sin\frac{3\pi}{3}}_{=0} + \underbrace{\sin\frac{4\pi}{3}}_{=-\frac{\sqrt3}{2}} + \underbrace{\sin\frac{5\pi}{3}}_{=-\frac{\sqrt3}{2}} + \underbrace{\sin\frac{6\pi}{3}}_{=0} = 0$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} f'\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sum_{k=0}^{6} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac12} + \underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{=-\frac12} + \underbrace{\cos\frac{3\pi}{3}}_{=-1} + \underbrace{\cos\frac{4\pi}{3}}_{=-\frac12} + \underbrace{\cos\frac{5\pi}{3}}_{=\frac12} + \underbrace{\cos\frac{6\pi}{3}}_{1} = 1$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

Beskonačan zbroj (redovi realnih brojeva —knjiga str. 123)

$$\sum_{n\in N_0} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n} = \left\{\begin{matrix}\text{formula} \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{1-\frac12} = \frac{1}{\frac12} = 2$$

$$\sum_k 3^{-k} = \sum_k \left(\frac13\right)^k = \left\{\begin{matrix}\text{formula} \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{1-\frac13} = \frac{1}{\frac23} = \frac32$$

Funkcijski red — $\sum f_n$ (knjiga str. 131)

Napiši 4. parcijalnu sumu izraza: $\displaystyle\sum_{n\in N} x^{-n} = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \ldots = \frac1x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$

Ovdje je $f_n(x) = x^{-n}$ i $\sum f_n = \sum x^{-n}$.

4. parc. suma jest $\displaystyle\frac1x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

Napiši 5. parcijalnu sumu izraza: $\displaystyle\sum_{n\in N} \sin^{(n)} x = \sin' x + \sin'' x + \sin''' x + \ldots$

$f^{(n)}(x)$ je n-ta derivacija funkcije $f(x)$.

5 parc. suma jest

$\sin' x = \cos x$
$\sin'' x = -\sin x$
$\sin''' x = -\cos x$
$\sin^{(4)} x = \sin x$
$\sin^{(5)} x = \cos x$

$\cos x - \sin x - \cos x + \sin x + \cos x = \cos x$

Taylorov red

Teorem 4.1.13 *(str. 169)* Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ ima na intervalu $I \subseteq X$ sve derivacije $(f|_I)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je $x_0 \in I$ bilo koja točka. Tada je, za svaki $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Izračunati Taylorov red funkcije $f(x) = x^4$ oko točke $x_0 = 1$.

$$x^4 = 1^4 + \frac{4 \cdot 1^3}{1}(x-1) + \frac{12 \cdot 1^2}{2}(x-1)^2 + \frac{24 \cdot 1}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 + 0$$

$$= 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

$(x^4)' = 4x^3$ $\quad (x^4)'' = 12x^2$

$(x^4)^{(3)} = 24x$ $\quad (x^4)^{(4)} = 24$

$(x^4)^{(5)} = (24)' = 0$ $\quad (x^4)^{(6)} = 0$

i sve daljnje derivacije $= 0$

Razviti funkciju $f(x) = \ln(2x)$ u Taylorov red po potencijama od $x - 1$. Izračunati barem prva 4 člana.

Zadatak sa roka 24.9.2009.

POTENCIJE $(x-1)^n$ ODGOVARAJU $(x-x_0)^n$ U TAYLOROVOM RAZVOJU $\Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln(2x) && \Rightarrow f(1) = \ln 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} && \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} && \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} && \Rightarrow f'''(1) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ln(2x) &\simeq \ln(2) + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 \\ &\simeq \ln(2) + (x-1) - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

Razviti funkciju $f(x) = e^{4x}$ u Taylorov red po potencijama od x. Izračunati barem prva 3 člana.

$\Rightarrow x_0 = 0$

Taylorov red oko točke $x_0 = 0$ naziva se još i Maclaurinov red.

Razviti funkciju $f(x) = \frac{x}{x-1}$ u Taylorov red po potencijama $x + 1$. Izraèunati barem prva 4 èlana.

Zadatak s roka 8.9.2009.

$\Rightarrow (x+1)^n = (x - x_0)^n \Rightarrow x_0 = \ldots$

Razviti funkciju $f(x) = \cos x$ u Taylorov red po potencijama $x - \frac{\pi}{2}$. Izračunati barem prva 4 člana.

Zadatak s roka 8.9.2009.

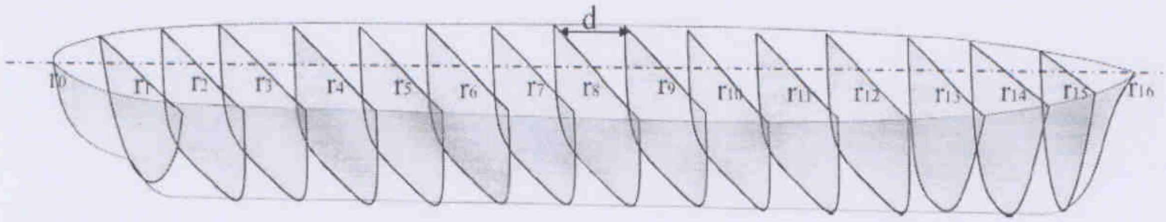
$x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \\ f'(x) &= -\sin x & f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin\tfrac{\pi}{2} = -1 \\ f''(x) &= -\cos x & f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &f(x) = \cos x = 0 - 1\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{0}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^3 + \ldots \\ &\cos x \simeq -\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^3 \end{aligned}\right.$$

Metode računanja volumena i površine aproksimacijom

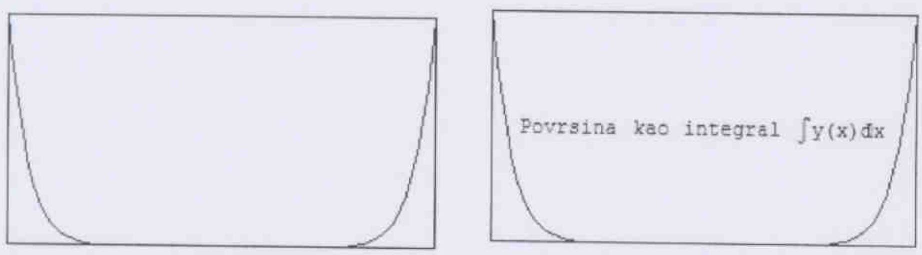
Primjer iz stručne prakse: deplasman broda

Primjer izračunavanja volumena metodom površine rebara (poprečnih vertikalnih ravnia) pojašnjava slijedeća slika. Dužina broda se podijeli na parni broj jednakih razmaka i izračuna površina rebara na tim razmacima.



Računanje deplasmana broda može se svesti na računanje površine rebara. Pokušajmo izračunati površinu rebra do vodene linije, koje odgovara formuli $v(x) = 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$, $x \in [-10, 10]$, gdje je v visina rebra od najniže točke u metrima, a x koordinata širine u metrima. Visina do vodene linije je 12 metara, a širina rebara 20 metara. Skica slijedi

Profil glavnog rebra kao y(x)=x^10



Aproksimacija površine pravokutnicima

Pokušavamo približno izraziti profil glavnog rebra kao uniju n vertikalnih stupaca — pravokutnika. Udaljenost od visine rebra $v(x)$ do visine vodene linije 12 odgovara funkciji $y(x) = 12 - v(x) = 12 - 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$. Ako aproksimiramo profil glavnog rebra sa $n = 10$ jednostavnijih oblika (npr. pravokutnika) tada nas zanima vrijednost funkcije $y(x)$ u 11 točaka ($x \in [-10, 10]$). To se naziva diskretizacija funkcije $y(x)$ na segmentu $[-10, 10]$ sa $10 + 1$ točaka. U sljedećoj tablici treba popuniti vrijednosti y_k koje nedostaju, a računaju se po formuli $y_k = y(x_k)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
y_k	0.00				12.00	12.00	12.00	12.00	11.93	10.71	0.00

$n = 10$

$\Delta x = 2$

$y(x) = 12 - 12 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^{10}$

Ako aproksimiramo profil glavnog rebra sa $n = 210$ jednostavnijih oblika (npr. pravokutnika) tada nas zanima vrijednost funkcije $y(x)$ u 21 točaka sa segmenta $x \in [-10, 10]$. To se naziva diskretizacija funkcije $y(x)$ na segmentu $[-10, 10]$ sa $20 + 1$ točaka. U sljedećoj tablici upisana je takva diskretizacija:

k	0	1	2	3	4	5	6	...	14	15	16	17	18	19	20
x_k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	...	4	5	6	7	8	9	10
y_k	0.00	7.83	10.71	11.66	11.93	11.99	12.00	...	12.00	11.99	11.93	11.66	10.71	7.83	0.00

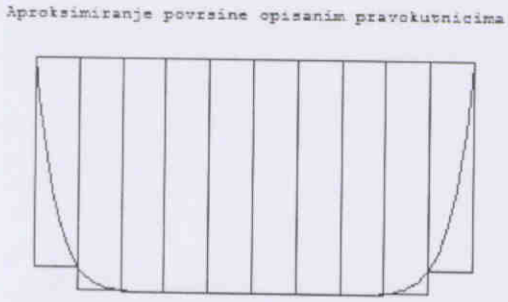
$n = 20$ $\Delta x = 1$

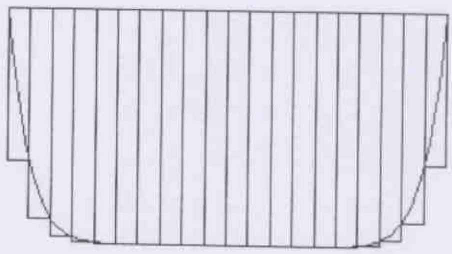
Segment $[-10, 10]$ na kojem diskretiziramo funkciju je duljine 20. Zbog toga je razmak između dvije točke diskretizacije $\triangle x = x_{k+1} - x_k = \frac{20}{n}$.

7

Aproksimacija površine opisanim pravokutnicima: $P \approx \triangle x \cdot \sum_{k=1}^{n} \max\{y_{k-1}, y_k\}$

U sljedećim primjerima aproksimiramo površinu glavnog rebra opisanim pravokutnicima. Tako dobivena aproksimacija površine glavnog rebra je veća od površine glavnog rebra, ali kako uzimamo sve veći broj točaka diskretizacije tako je aproksimacija sve točnija. Za zadani n izračunati aproksimaciju površine prema formuli iz podnaslova:





$n = 10$, $\triangle x = \frac{20}{10} = 2$,

$P \approx$

$$P \approx \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{10} \max\{y_{k-1}, y_k\}$$

$$= 2 \cdot (10.71 + 11.93 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.93 + 10.71)$$

$$= 234.56$$

$n = 20$, $\triangle x = \frac{20}{20} = 1$,

$P \approx$

$$P \approx \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{20} \max\{y_{k-1}, y_k\}$$

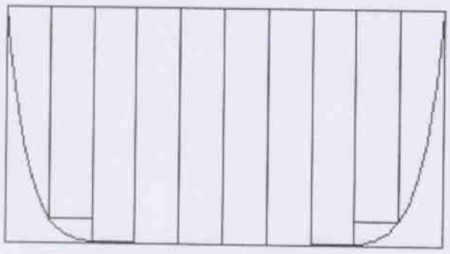
$$= 1 \cdot (7.83 + \overset{10.71}{\cancel{10.81}} + 11.66 + 11.93 + 11.99 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.99 + 11.93 + 11.66 + \underset{10.71}{\cancel{10.81}} + 7.83)$$

$$= 228.24$$

Aproksimacija površine upisanim pravokutnicima: $P \approx \triangle x \cdot \sum_{k=1}^{n} \min\{y_{k-1}, y_k\}$

U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine upisanim pravokutnicima, koja će ispasti manja od površine glavnog rebra, ali što je veći broj točaka diskretizacije n time je i dobivena aproksimacija preciznija. Korisimo formulu iz podnaslova.

Aproksimiranje povrsine upisanim pravokutnicima



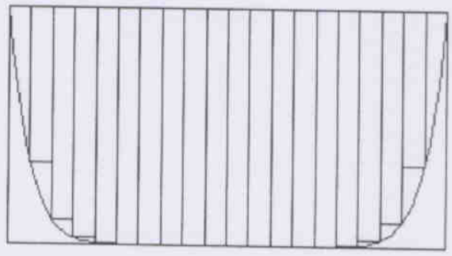
$n = 10$, $\triangle x = 2$,
$P \approx$

$$P \approx \Delta x \cdot \sum \min\{y_{k-1}, y_k\}$$

$$= \cancel{2 \cdot (0 + 7.83 + 10.71 + 11.66}$$

$$= 2 \cdot (0 + 10.71 + 11.93 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.93 + 10.71 + 0)$$

$$= 186.56$$



$n = 20$, $\triangle x = 1$,
$P \approx$

$$P \approx \Delta x \cdot \sum \min\{y_{k-1}, y_k\}$$

$$= 1 \cdot (0 + 7.83 + 10.71 + 11.66 + 11.93 + 11.99 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.99 + 11.93 + 11.66 + 10.71 + 7.83 + 0)$$

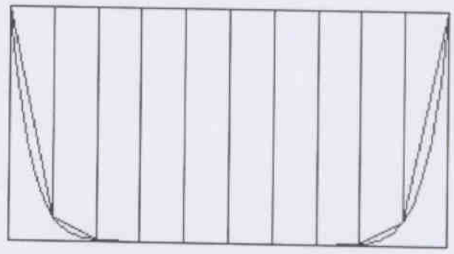
$$= 204.24$$

Aproksimacija površine trapezima - formula: $P \approx \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)$

U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine trapezima. Za veći broj točaka diskretizacije n dobiva se preciznija aproksimacija. Korisimo formulu iz podnaslova. Kvalitetu aproksimacije moguće je procijeniti sa priložene slike na kojoj su nacrtani trapezi kojima se aproksimira površina glavnog rebra.

$n = 10$, $\triangle x = 2$, $P \approx$

Aproksimiranje povrsine trapezima



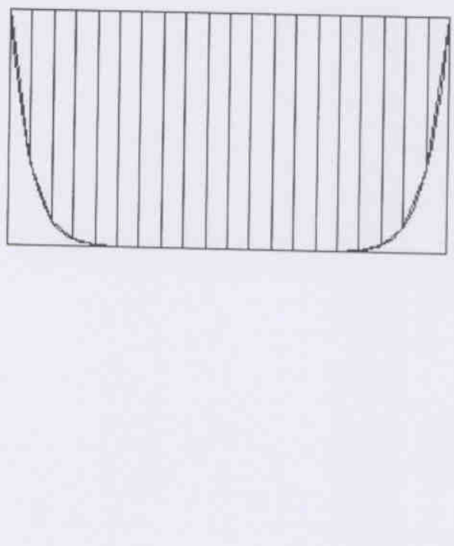
$$P \approx \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + y_{10} + 2\sum_{k=1}^{9} y_k\right)$$

$$= \frac{2}{2}\left(0 + 0 + 2\cdot(10.71 + 11.93 + 12 + 12 + 12 + 11.93 + 10.71)\right)$$

$$= 1\cdot(0 + 2\cdot 105.28) = 210.56$$

$\cancel{n = 10}$, $\triangle x = 1$, $P \approx$

$n=20$



$$P \approx \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + y_{20} + 2\sum_{k=1}^{19} y_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + 0 + 2(7.83 + 10.71 + 11.66 + 11.93 + 11.99 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.99 + 11.93 + 11.66 + 10.71 + 7.83)\right] = 216.24$$

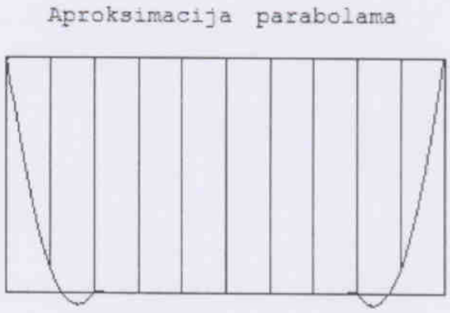
10

Simpsonova formula: $P \approx \frac{\triangle x}{3}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1}\right)$

U sljedećim primjerima radimo aproksimaciju tražene površine parabolama (polinomima drugog stupnja). Preciznost ove metode je vrlo visoka za veći broj točaka diskretizacije. Primijetiti sa slike koja prikazuje ovu aproksimaciju za $n = 20$ kako aproksimirani oblik vjerno opisuje oblik glavnog rebra iz primjera. Koristiti formulu iz podnaslova.

$\triangle x = 2$, $P \approx$

$n = 10$

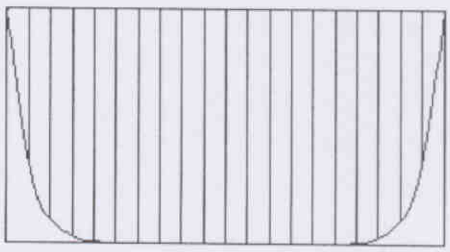


$$P \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_{10} + 2\sum_{k=1}^{4} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{5} y_{2k-1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\Big[0 + 0 + 2(11.93 + 12 + 12 + 11.93) +$$
$$4(10.71 + 12 + 12 + 12 + 10.71)\Big]$$
$$= 216.93$$

$\triangle x = 1$, $P \approx$

$n = 20$



$$P \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_{20} + 2\sum_{k=1}^{9} + 4\sum_{k=1}^{10} y_{2k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Big[0 + 0 + 2(10.71 + 11.93 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.93 + 10.71)$$
$$+ 4(7.83 + 11.66 + 11.99 + 12 + 12 + 12 + 12 + 11.99 + 11.66 + 7.83)\Big]$$
$$= 218.13$$