13

Jednostavni zadaci neodređenih integrala. Računanje direktno iz tablice.

Odrediti neku primitivnu funkciju od $f(x) = x$. Odrediti integral $\int x\,\mathrm{d}x$.

Primitivne od x su: $\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}+1, \frac{x^2+1}{2}, \dots$ $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$

Odrediti neku primitivnu funkciju od $f(x) = x^2$. Odrediti integral $\int x^2\,\mathrm{d}x$.

$x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3}, \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

BUDUĆI JE C BILOKOJI BROJ TAKO MOŽEMO PISATI C UMJESTO 4C

Odrediti integral $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$

Odrediti integral $\int 4x^3\,\mathrm{d}x = 4\int x^3\,dx = 4\cdot\left(\frac{x^4}{4}+C\right) = x^4 + 4C = x^4 + C$

Odrediti integral $\int \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x^3\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}+C\right) = \frac{x^4}{12} + C$

Odrediti integral $\int 2x^5\,\mathrm{d}x = 2\int x^5\,dx = 2\left(\frac{x^6}{6}+C\right) = \frac{x^6}{3} + C$

Odrediti integral $\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = \{x' = 1\} = x + C$

X Odrediti integral $\int 5\,\mathrm{d}x = 5\int \mathrm{d}x = 5x + C$

Odrediti integral $\int 2x^5 + 5\,\mathrm{d}x = \int (2x^5+5)\,dx = \int 2x^5\,dx + \int 5\,dx = 2\cdot\frac{x^6}{6} + 5x + C = \frac{x^6}{3} + 5x + C$

Odrediti integral $\int \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 5\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9}x^2 - 5\,dx = \frac{1}{9}\frac{x^3}{3} - 5x + C = \frac{x^3}{27} - 5x + C$

Odrediti integral $\int \sin x - \pi\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,dx - \int \pi\,dx = \int \sin x\,dx - \pi\int dx = -\cos x - \pi x + C$

Odrediti integral $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

Odrediti integral $\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C$

Odrediti integral $\int \frac{3}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y = 3\int \frac{1}{\cos^2 y}\,dy = 3\tan y + C$

Odrediti integral $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{POGAĐAMO:} \\ (\sin x)' = \cos x \\ [\sin(2x)]' = 2\cdot\cos(2x) \end{array} \quad \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(2x)\ \checkmark \right\} = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

Odrediti integral $\int \left(\frac{2}{1-u^2} + \frac{1}{4(1-u^2)} + 3\right)\mathrm{d}u = 2\underbrace{\int \frac{1}{1-u^2}\,du} + \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{1-u^2}\,du} + 3\underbrace{\int du}$

TABLICA $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

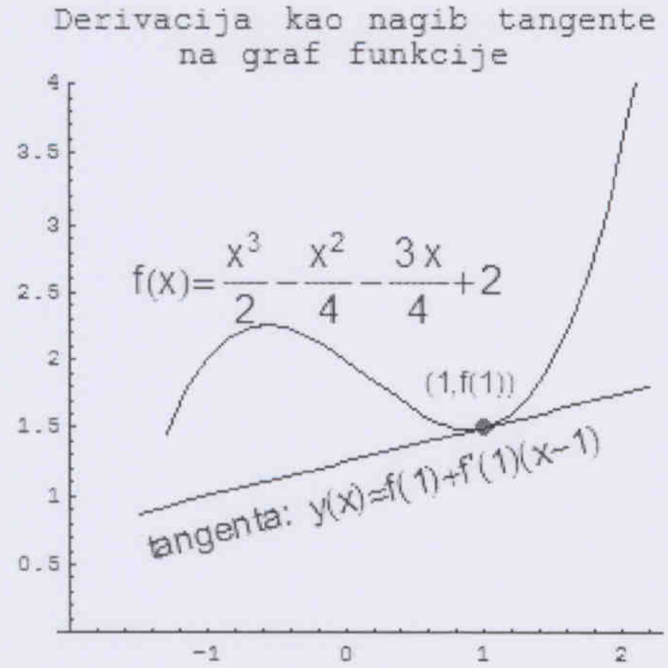
$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + 3\cdot u = \frac{9}{8}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + 3u + C$

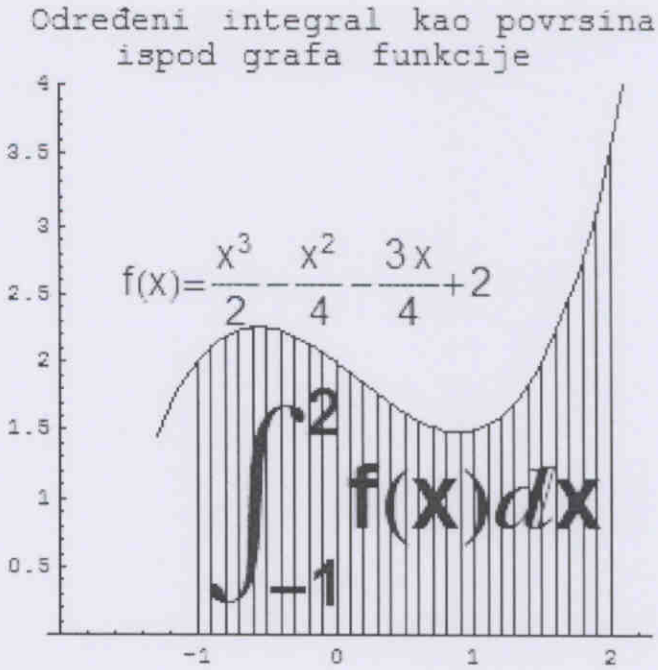
Odrediti integral $\int \frac{1}{1+v^2} + \frac{3}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{1+v^2}\,dv + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \arctan v + 3\arcsin v + C$

Nije nužno upisivati zagrade jer raspoznajemo da sve što se nalazi između znaka $\int$ i znaka dv treba integrirati.

Odrediti integral $\int \frac{2}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = 2\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$

Određeni integral i površina ispod krivulje

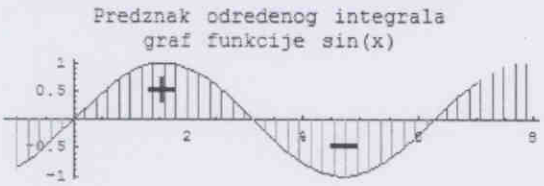




Određeni integral biti će preciznije definiran na predavanjima. Za sada je dovoljno reći da je određeni integral neprekidne funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ broj koji se označava oznakom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i koji odgovara površini između grafa funkcije $f(x)$ i osi x na intervalu $[a,b]$ (vidi sliku iznad). Predznak određenog integrala uzima u obzir da li je graf funkcije f iznad osi x (+) ili ispod osi x (-). Vidi skicu grafa funkcije $\sin x$. Određeni integral je u bliskoj vezi s neodređenim integralom preko Newton-Leibnitzove formule (vidi Teorem 4.3.5) koja kazuje da ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$ tada vrijedi



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \quad \overset{\text{oznaka}}{=} \quad \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b$$

Primjer. Dana je funkcija $y(x) = 12 - 12\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^{10}$. Izračunati neodređeni integral $\int_{-10}^{10} y(x)\,\mathrm{d}x$ i usporediti sa ranije napravljenim aproksimacijama u primjerima u kojima se aproksimira površina glavnog rebra. Koja je formula bila najpreciznija?

$y(x) = 12 - \frac{12}{10^{10}}\cdot x^{10}$

$\int y(x)\,dx = \int 12 - \frac{12}{10^{10}}x^{10}dx = 12\int dx - \frac{12}{10^{10}}\int x^{10} = 12x - \frac{12}{10^{10}}\cdot\frac{x^{11}}{11} + C$

$\int_{-10}^{10} y(x)\,dx = \int_{-10}^{10} 12 - \frac{12}{10^{10}}x^{10}dx = \left[12x - \frac{12}{10^{10}}\cdot\frac{x^{11}}{11}\right]_{-10}^{10} = \left(12\cdot 10 - \frac{12}{10^{10}}\cdot\frac{10^{11}}{11}\right) - \left(12\cdot(-10) - \frac{12}{10^{10}}\cdot\frac{(-10)^{11}}{11}\right)$

$= 120 - \frac{12\cdot 10}{11} + 120 - \frac{12\cdot 10}{11}$

$= 240 - \frac{240}{11} = 218.18$

$P = 218.18$

Najpreciznija je bila ...

Primjer. Izračunati površinu ispod grafa funkcije $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2$ na intervalu $[-1, 2]$.

$$P = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 2\right)dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} - \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(2^4 - (-1)^4\right) - \frac{1}{12}\left(2^3 - (-1)^3\right) - \frac{3}{8}\left(2^2 - (-1)^2\right) + 2\left(2 - (-1)\right)$$

$$= \frac{15}{8} - \frac{8+1}{12} - \frac{3}{8}\cdot 3 + 6 = \frac{15}{8} - \frac{3}{4} - \frac{9}{8} + 6 = 6$$

Diskretizirati prethodnu funkciju u nekoliko točaka i ocjeniti grešku računanja površine primjenom trapezne formule $P \approx \frac{\triangle x}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)$.

Uzmimo $n = 6 \Rightarrow \Delta x = \frac{\text{desna granica} - \text{lijeva granica}}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$

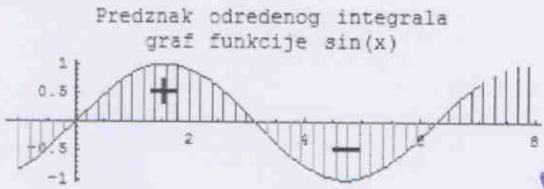
k	x_k	$y_k = f(x_k)$	
0	-1	2	$\leftarrow y_0$
1	-0.5	2.25	$\leftarrow y_1$
2	0	2	⋮
3	0.5	1.625	⋮
4	1	1.5	
5	1.5	2	
6	2	3.5	$\leftarrow y_6$

$$P \approx \frac{0.5}{2}\left(2 + 3.5 + 2\left(2.25 + 2 + 1.625 + 1.5 + 2\right)\right) = \underbrace{6.0625}_{P_T}$$

$$\text{APSOLUTNA GREŠKA} = |P_T - P| = |6.0625 - 6| = 0.0625$$

$$\text{RELATIVNA GREŠKA} = \frac{\text{APSOLUTNA GREŠKA}}{\text{TOČAN REZULTAT}} = \frac{0.0625}{6} = 0.01041\dot{6} \approx 1\,\%$$

Primjer. Izračunati površinu određenu grafom funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$ (*pazi na predznak, vidi sliku*).



$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = \left(-\cos\right)_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos(2\pi) - (-\cos\pi) = -1-1 = -2$$

$P = 2$ VIDI SLIKU

Zapamtiti! Površina je uvijek pozitivan broj. Ako nekim računom ispadne negativan tada to upućuje na grešku u računu i nije dovoljno samo na kraju zamijeniti predznak, već treba istražiti grešku u računu.

Diskretizirati funkciju u nekoliko točaka i ocijeniti grešku računanja gornjeg određenog integrala primjenom Simpsonove formule $P \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1}\right)$

VAŽNO DA JE n PARAN BROJ.

UZMIMO $n=6 \Rightarrow \Delta x = \frac{2\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{6} \approx 0.524$

DOBRO JE IZABRATI FIKSAN BROJ DECIMALA S KOJIMA RAČUNATI. BIRAM RAČUN SA 3 DECIMALNA MJESTA IZA DECIMALNE TOČKE.

k	x_k	$y_k = f(x_k)$
0	3.142	0.000
1	3.666	-0.501
2	4.190	-0.867
3	4.714	-1.000
4	5.238	-0.865
5	5.762	-0.498
6	6.286	0.003

$x_0 =$ POČETAK INTERVALA $= \pi$

$x_0 = 3.142$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 3.666$

$x_2 = x_1 + \Delta x = \ldots$

$y_0 = \sin(3.142) = 0.000$

$y_1 = \sin(3.666) = -0.501$

$y_2 = \sin(x_2) = \ldots$

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_6 + 2\sum_{k=1}^{\frac{6}{2}-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{\frac{6}{2}} y_{2k-1}\right)$$

$$I \approx \frac{0.524}{3}\left(y_0 + y_6 + 2\sum_{k=1}^{2} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{3} y_{2k-1}\right)$$

$$I \approx \frac{0.524}{3}\left(y_0 + y_6 + 2(y_2 + y_4) + 4(y_1 + y_3 + y_5)\right)$$

$$I \approx \frac{0.524}{3}\left(0.000 + 0.003 + 2(-0.867 - 0.865) + 4(-0.501 - 1.000 - 0.498)\right)$$

$$I \approx \underbrace{-2.001}_{I_S = I_{SIMPSON}}$$

APSOLUTNA GREŠKA $= |I_S - I| = |-2.001 - (-2)|$
$= |-0.001| = 0.001$

RELATIVNA GREŠKA $= \frac{0.001}{2} = 0.0005 = 0.05\%$

Zadatak. Nađi površinu ispod krivulje $f(x) = \sin x$ između $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

NA INTERVALU $\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ SIN(x) JE POZITIVAN.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = (-0) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P = I = \frac{1}{2}$$

Nepravi integral

Ponekad ima smisla tražiti površinu neomeđenih skupova. O tome govori nepravi integral.

Nepravi integral je određeni integral takav da:

1. je podintegralna funkcija neograničena na intervalu integracije ili
2. je interval integracije neograničen.

VIDI: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Primjer: podintegralna funkcija neograničena na intervalu integracije

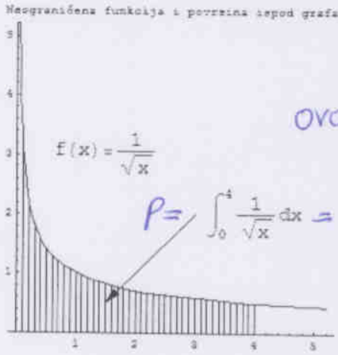
Primijeti da je područje na slici neograničeno odozgo. Nepravi integral ovog tipa riješavamo kao običan integral.

Riješiti: $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l}\text{POKUŠAVAMO RIJEŠITI}\\ \text{KAO ODREĐENI INTEGRAL}\end{array} \right\} =$

$$= \int\limits_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l}(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\\ \Rightarrow (2x^{\frac{1}{2}})' = x^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right\} = \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)_0^2$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right)_0^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{4} = 4$$



ZANIMLJIVO: OVO NEOGRANIČENO PODRUČJE IMA KONAČNU POVRŠINU!

Primjer iz fizike (gravitacija $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Treba izračunati rad potreban za dovođenje tijela iz referentne točke do točke koja je na udaljenosti R od drugog tijela. Referentna točka je ona u kojoj je potencijalna energija $E_p = 0$, a to je $r = \infty$.

Nepravi integral ovog tipa riješava se prelaskom na limes, gdje umjesto $F(\infty)$ koristimo $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

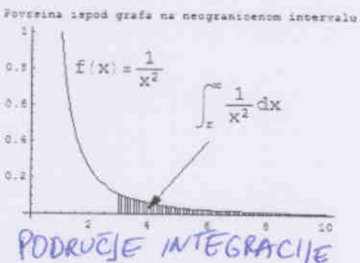
$$W = E_p = \int\limits_\infty^R F_G\,dr = \int\limits_\infty^R G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = (G,\ m_1,\ m_2 \text{ su konstante}) =$$

$$= G m_1 m_2 \int\limits_\infty^R \frac{1}{r^2}\,dr = G m_1 m_2 \int\limits_\infty^R r^{-2}\,dr = G m_1 m_2 \left(\frac{r^{-1}}{-1}\right)_\infty^R = G m_1 m_2 \left[\frac{R^{-1}}{-1} - \frac{\infty^{-1}}{-1}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{-1} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$= G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{R} - 0\right)$$

$$= -\frac{G m_1 m_2}{R}$$



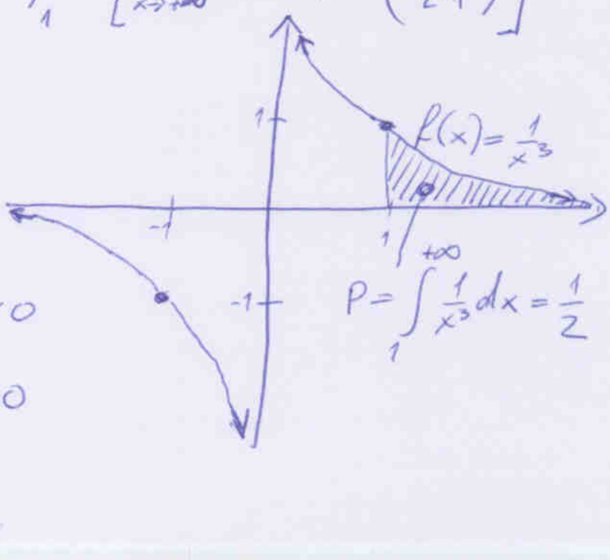
PODRUČJE INTEGRACIJE NEOGRANIČENO ZDESNA.

RAD ISPAO NEGATIVAN JER TIJELO SAMO "PADA" IZ REFERENTNE TOČKE PREMA DRUGOM TIJELU.

Zadatak. Neka je $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Odrediti $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Skicirati graf funkcije f i površinu određenu integralom.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} x^{-3}\,dx = \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)_1^{+\infty} = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^{+\infty} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)\right]$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$



$$P = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$$

$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad f'(x) = \frac{-3}{x^4} < 0\ \forall x \in D(f)$

$\Rightarrow f$ PADA

$\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

$f''(x) = \frac{+12}{x^5}$ $\Rightarrow$ $\frown$ za $x<0$, $\Rightarrow$ $\smile$ za $x>0$

$\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$