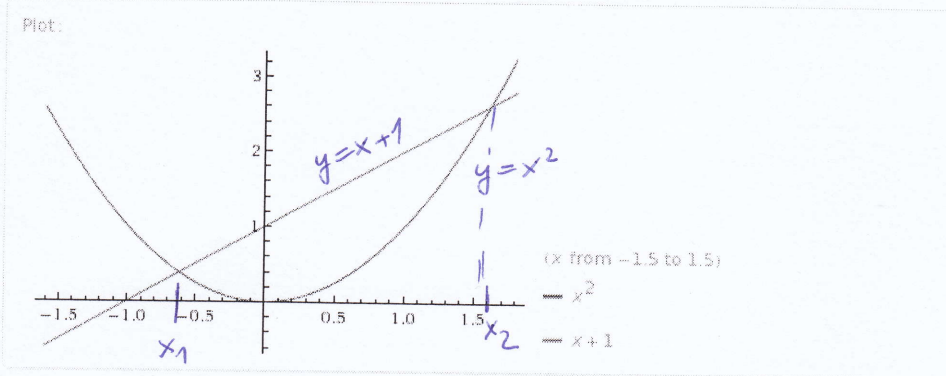


Traženje površine između krivulja integriranjem i druge primjene

Površina između dvije krivulje određuje se kao integral razlike funkcija određenih gornjom i donjom krivuljom na intervalu određenom sjecištima.

Jednostavniji primjeri

Odrediti površinu dijela ravnine omeđenog parabolom $y = x^2$ i $y = x + 1$.



1. Sjecišta ...

2. Slika ... ✓

$$3. \int_{x_1}^{x_2} [x+1 - (x^2)] dx =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x+1-x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\approx \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-0.62}^{1.62} = \left(\frac{(1.62)^2}{2} + 1.62 - \frac{(1.62)^3}{3} \right) - \left(\frac{(-0.62)^2}{2} - 0.62 - \frac{(-0.62)^3}{3} \right)$$

$$= 1.31 + 1.62 - 1.42 - 0.19 + 0.62 - 0.08$$

$$= 1.86$$

$$\begin{aligned} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{aligned} \Rightarrow x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

Određiti površinu između krivulja $y = 2t - t^2$ i $y = t$.

Sjecišta parabole sa x osi određena su sa $2t - t^2 = -(t-0)(t-2)$
Tjeme parabole nalazi se na pola između sjecišta sa x osi.

1. Sjecišta

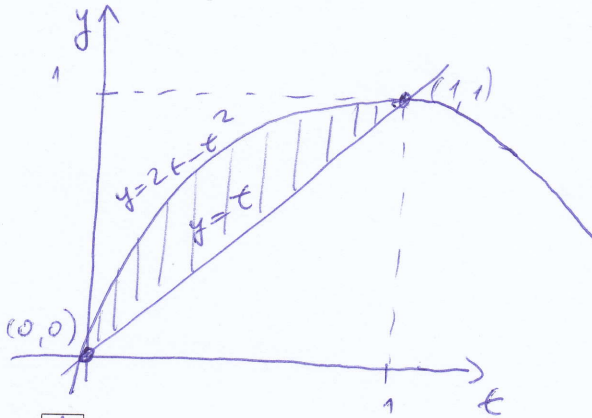
$$2t - t^2 = t \Rightarrow \text{~~2t - t^2 = t~~ } t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$t_2 = 1 \quad y_2 = 1$$

2. Slika¹



$$y = 2t - t^2 \text{ GLEDA PREMA DOLJE}$$

$$y' = 2 - 2t \Rightarrow y' = 0 \text{ za } t = 1$$

\Rightarrow LOK. EKSTREM ZA $t = 1$

\Rightarrow TJEME PARABOLE ZA $t = 1$

3. Površina =

$$\int_0^1 (2t - t^2 - t) dt = \int_0^1 (t - t^2) dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Određiti površinu između krivulja $y = x + 2$ i $y = 4 + x - x^2$.

1. Sjecišta...

$$x + 2 = 4 + x - x^2$$

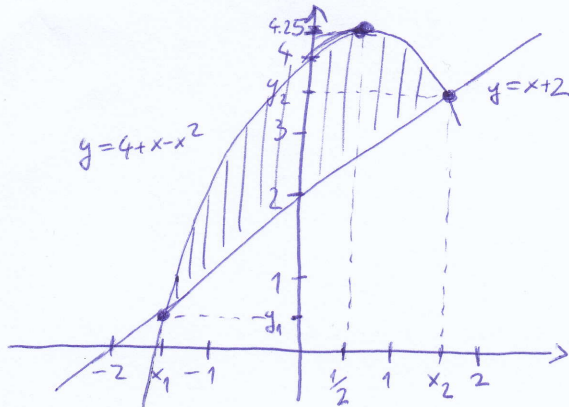
$$\Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad y_1 = -\sqrt{2} + 2 \rightarrow T_1(-1.41, 0.59)$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \quad y_2 = \sqrt{2} + 2 \rightarrow T_2(1.41, 3.41)$$

2. Slika...



PARABOLA:

$$y = 4 + x - x^2$$

\uparrow OKRENUTA
 \Rightarrow PREMA
DOLJE

TJEME $x = \frac{1}{2}$

$$y = 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 4.25$$

Tjeme parabole:

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ (4 + x - x^2)' &= 0 \\ 1 - 2x &= 0 \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

3. Površina = ...

$$P = \int_{x_1}^{x_2} (4 + x - x^2) - (x + 2) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{4}{3} + 4 \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

¹Graf polinoma nultog reda (konstanta) je horizontalni pravac.

Graf polinoma prvog reda (afina funkcija) $f(x) = ax + b$ je pravac kojem je b odsječak na y -osi, dok je a koeficijent smjera (određuje nagib: pomak za 1 u smjeru x -osi donosi pomak za a u smjeru y -osi). Također, svaki pravac je potpuno određen sa dvije točke.

Graf polinoma drugog reda je parabola. Parabolu možemo pokušati skicirati tako da odredimo dvije nultočke (ako postoje) i vrijednost u sredini među nultočkama (tjeme parabole). Tjeme parabole je lokalni ekstrem pa se može dobiti i kao nultočka prve derivacije. Predznak uz kvadratni član određuje da li je parabola okrenuta prema gore (+) ili prema dolje (-).

Slika krivulja mora odgovarati ranije pronađenim sjecištima!

Kod crtanja grafa može vam pomoći znanje iz dodatka D2 matematike 1 koji se nalazi na mrežnom mjestu <http://personal.unizd.hr/~makosor/mat1/dodatak2.pdf>.

Odrediti površinu između krivulja² $y = 2x^2 + 1$ i $y = x^2 + 2x + 4$.

SJECIŠTA

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 4$$

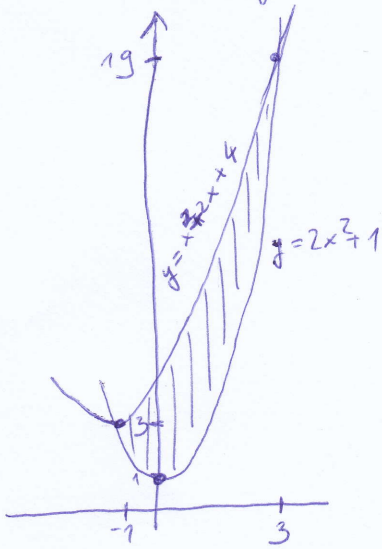
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

MULTIČKE $\rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & y_1 = 3 \\ x_2 = 3 & y_2 = 19 \end{cases}$

SKICA GRAFA

$y = 2x^2 + 1$ PRETNA GORE
 $y' = 4x$
 EKSTREM (MIN)
 ZA $x = 0, y = 1$

$y = x^2 + 2x + 4$ PRETNA GORE
 $y' = 2x + 2$
 EKSTREM (MIN)
 ZA $x = -1, y = 3$



$$P = \int_{-1}^3 [(x^2 + 2x + 4) - (2x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^3 [-x^2 + 2x + 3] dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right)_{-1}^3$$

$$= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right)$$

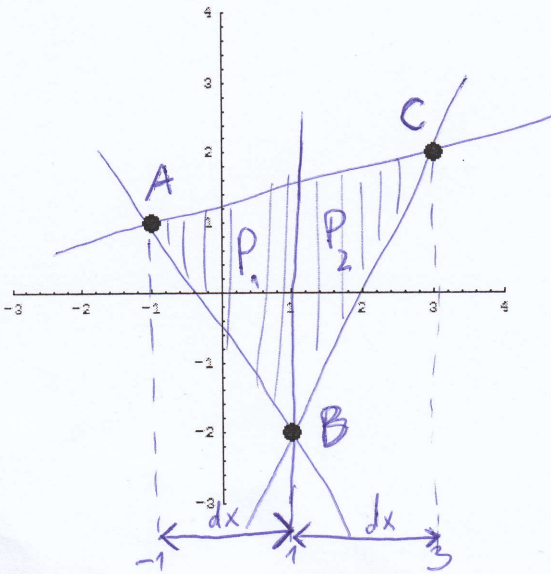
$$= 9 - \frac{1}{3} + 2 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

²Dvije parabole. Kod crteža primijetiti $y = x^2 + 2x + 4 = x(x+2) + 4$ ili crtati skicu pomoću tjemena parabola i sjecišta.

Računanje površine integriranjem po dijelovima

Pronađi površinu trokuta zadanog točkama $A(-1,1)$, $B(1,-2)$, $C(3,2)$. Koji pravci³ omeđuju dani trokut?

1. slika trokuta
2. koje krivulje određuju trokut?
3. granice integracije
4. postaviti integral



$$AB: (y-1)(1+1) = (-2-1)(x+1)$$

$$2(y-1) = -3(x+1)$$

$$2y-2 = -3x-3$$

$$2y = -3x-1$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$BC: (y+2)(3-1) = (2+2)(x-1)$$

$$2(y+2) = 4x-4$$

$$y = 2x-4$$

$$AC: (y-1)(3+1) = (2-1)(x+1)$$

$$4(y-1) = x+1$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$$

$$P = P_1 + P_2$$

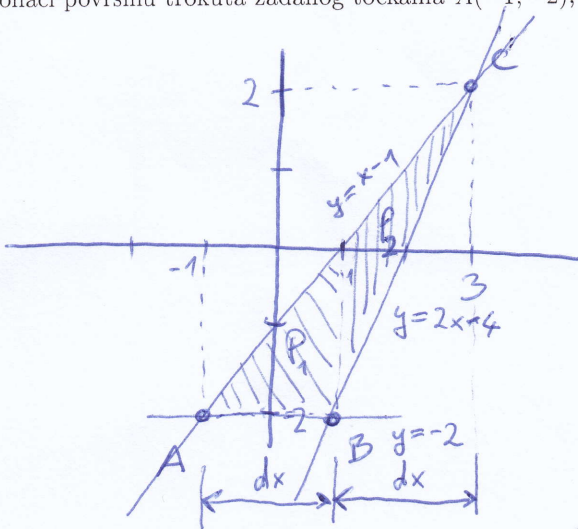
$$P_1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{4} \right) - \left(-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{7}{4}x + \frac{7}{4} \right) dx = \left(\frac{7}{4} \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{7}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{7}{4}(1+1) = \frac{7}{2}$$

$$P_2 = \int_1^3 \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{4} \right) - (2x-4) dx = \int_1^3 \left(-\frac{7}{4}x + \frac{21}{4} \right) dx = \left(-\frac{7}{8}x^2 + \frac{21}{4}x \right) \Big|_1^3 = \dots = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

Pronađi površinu trokuta zadanog točkama $A(-1,-2)$, $B(1,-2)$, $C(3,2)$.

1. slika trokuta
2. koje krivulje određuju trokut?
3. granice integracije
4. postaviti integral



$$AB: (y+2)(1+1) = (-2+2)(x+1)$$

$$2y+4 = 0(x+1)$$

$$2y+4 = 0$$

$$y = -2$$

$$BC: (y+2)(3-1) = (2+2)(x-1)$$

$$2(y+2) = 4(x-1)$$

$$2y+4 = 4x-4$$

$$y = 2x-4$$

$$AC: (y+2)(3+1) = (2+2)(x+1)$$

$$4(y+2) = 4(x+1)$$

$$y = x-1$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int_{-1}^1 [(x-1) - (-2)] dx = \int_{-1}^1 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2$$

$$P_2 = \int_1^3 [(x-1) - (2x-4)] dx = \int_1^3 (-x+3) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3 = -\frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3 = 2$$

$$\Rightarrow P = 2 + 2 = 4$$

³Pravac kroz dvije točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) odgovara jednadžbi $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

Računanje površine uz zamjenu osi $x \leftrightarrow y$

Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $2x + y + 1 = 0$ i parabolom $y^2 = 1 + x$.

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{4}$$

$$y_1 = -1 \quad x_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$T_1(0, -1) \quad T_2(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$$

1. Sjecišta

$$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-y-1}{2} \Rightarrow \frac{-y-1}{2} = y^2 - 1$$

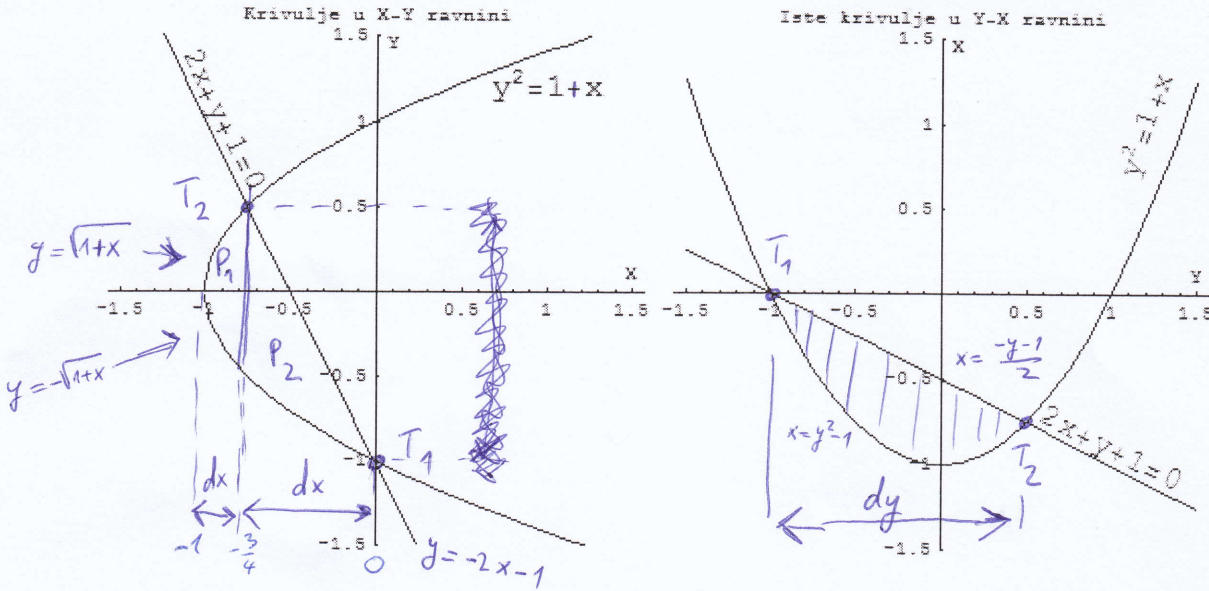
$$y^2 = 1 + x \Rightarrow x = y^2 - 1$$

$$-y-1 = 2y^2 - 2$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

2. Slika

Kvadratni član je y^2 i stoga promatrajmo krivulje kao funkcije $x = f(y)$. Mijenjamo osi $x \leftrightarrow y$.



3. Ako računamo prema (prvoj) slici u $x - y$ ravnini računamo:

$$P_1 = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} (\sqrt{1+x}) - (-\sqrt{1+x}) dx = 2 \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \sqrt{1+x} dx = \left(\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 0 \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

$$P_2 = \int_{-\frac{3}{4}}^0 (-2x-1) - (-\sqrt{1+x}) dx = -2 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-\frac{3}{4}}^0 + \left(\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right)_{-\frac{3}{4}}^0 = -2 \left(0 - \frac{9}{32} \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} + \frac{7}{12}$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{12} + \frac{9}{16} - \frac{3}{4} + \frac{7}{12} = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} + \frac{8}{12} = \frac{9}{16}$$

Ako računamo u $y - x$ ravnini (druga slika):

Sam procijeni koji ti je postupak jednostavniji.

$$P = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-y-1}{2} - (y^2-1) \right] dy = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - y^2 \right] dy = \left(-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{y^3}{3} \right)_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1+8}{24} = \frac{15}{16} - \frac{9}{24} = \frac{15}{16} - \frac{3}{8} = \frac{15}{16} - \frac{6}{16} = \frac{9}{16}$$

Izračunati površinu lika omeđenog parabolama $y^2 = 2x + 5$ i $y^2 = -2x + 3$.

Kada se javljaju parabole sa članom y^2 možda je najbolje odmah napraviti zamjenu $x \leftrightarrow y$.

SJECIŠTA:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = -2, y_1 = -\frac{1}{2}, T_1(-2, -\frac{1}{2})$$

$$x_2 = 2, y_2 = -\frac{1}{2}, T_2(2, -\frac{1}{2})$$

$$x^2 = 2y + 5$$

$$x^2 = -2y + 3$$

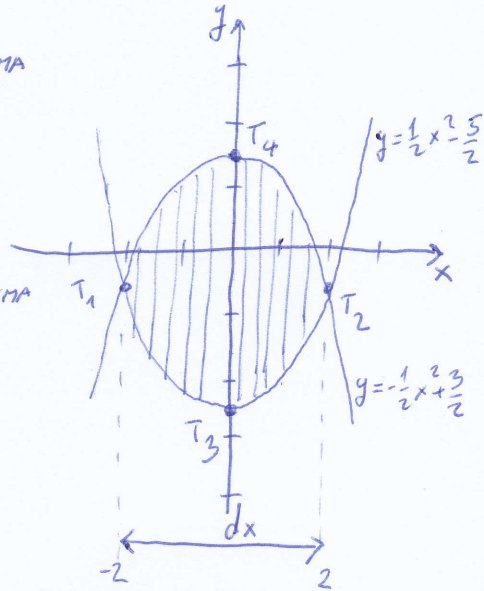
$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

SKICA:

PARABOLA OTVORENA PREMA GORE
 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$
 $y' = x = 0$ MINIMUM
 $x=0 \rightarrow y = -\frac{5}{2} \Rightarrow T_3(0, -\frac{5}{2})$

PARABOLA OTVORENA PREMA DOLJE
 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$
 $y' = -x = 0 \Rightarrow x=0$ MAKSIMUM
 $x=0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow T_4(0, \frac{3}{2})$



POVRŠINA KAO INTEGRAL:

$$P = \int_{-2}^2 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}\right) \right] dx$$

$$= \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y^2 = 2x + 5$ i pravcem $y = -\sqrt{3}x$.

SJECIŠTA:

$$x \leftrightarrow y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y + 5 \\ x = -\sqrt{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

← PARABOLA OKRENVUTA PREMA GORE
 ← PRAVAC KOJI "PADA"

$$\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad | \cdot 6$$

$$3x^2 - 15 = -2\sqrt{3}x$$

$$3x^2 + 2\sqrt{3}x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3}$$

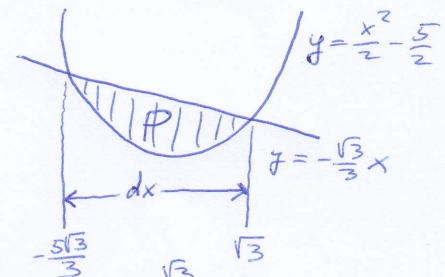
$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12(1+15)}}{6} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 4^2}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 8\sqrt{3}}{6} \approx 2.88$$

$$x_1 = \frac{-10\sqrt{3}}{6} = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

SKICA GRAFA:



$$P = \int_{-\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}\right) \right] dx = \int_{-\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2}\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{5}{2}x\right)_{-\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = 2.60 - (-5.61) = 8.21$$