Integriranje racionalnih funkcija

Podsjetnik: racionalne funkcije u brojniku i nazivniku sadrže polinome. Metode rješavanja integrala racionalnih funkcija sažete su u ovoj cjelini.

Tri važna tipa integrala

Tip A: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-c)^n}$ **rješavamo supstitucijom** $t = x - c$

Primjer. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^3} = \begin{Bmatrix} t = x-5 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{(x-5)^{-2}}{-2} + C$

$= -\frac{1}{2(x-5)^2} + C$

Ovo je lagano! Obična supstitucija.

Tip B: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$, **gdje je** $b^2 - 4ac < 0$

Treba ax^2+bx+c iz nazivnika prikazati u obliku $(\textit{nešto})^2 + \textit{broj}$, a zatim napraviti supstituciju $t = \textit{nešto}$:

Primjer. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4} = \begin{Bmatrix} \text{VIDI} \\ \text{ISPOD} \end{Bmatrix} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+3} = \begin{Bmatrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C$

$x^2-2x+4=0$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \notin \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ nazivnik nema nultočki

$x^2-2x+4 = (x^2-2x+1) - 1 + 4 = (x-1)^2+3$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

Uvjet $b^2 - 4ac < 0$ znači da se ax^2+bx+c ne može rastaviti na realne faktore kao u tipu A.

Integral **tipa B** dodano se komplicira kada je $n > 1$. Sada ćemo napraviti primjer kada je $n = 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+4)^2} = \left\{ \begin{matrix} \text{u nazivniku želimo dobiti} : (\textit{nešto})^2 + \textit{broj} \\ x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 \end{matrix} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left((x-1)^2+3\right)^2} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{3}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{t^2+3-t^2}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{t^2+3}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t}_{\text{riješavam odvojeno}} - \frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{t^2}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t}_{\text{riješavam odvojeno}} = (\blacksquare) = \ldots$$

Nazivnika nema nultočke!
1. korak: nazivnik $= t^2 + \textit{broj}$
2. korak: u brojniku »izmislimo« nazivnik
3. korak: rastavimo i odvojeno riješimo

$$\int \frac{t^2+3}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left\{ \begin{matrix} y = \frac{t}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan y =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Integral $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}$ je tablični.

SUPSTITUCIJOM $\begin{Bmatrix} w = t^2+3 \\ dw = 2t\,dt \end{Bmatrix}$

$$\int \frac{t^2}{(t^2+3)^2} \mathrm{d}t = \left\{ \begin{matrix} u = t, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2}, & v = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+3} \end{matrix} \right\} = \overbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+3} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}}^{uv - \int v\,\mathrm{d}u} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+1+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\ldots = (\blacksquare) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) \right) + C$$

Parcijalnom integracijom opet smo se sveli na $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}$

U prethodnom primjeru rješili smo integral racionalne funkcije **tipa B** (kvadratni član u nazivniku nema nultočaka) za potenciju $n = 2$. Primijeti da se integral $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^2}$ sveo na rješavanje integrala $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)^1}$. Dakle s potencije $n = 2$ sveli smo se na potenciju $n = 1$. Možemo zaključiti kako se svaki integral **tipa B** može riješiti tako da se koracima pokazanim u prethodnom primjeru svedemo sa potencije nazivnika n na sličan integral sa potencijom nazivnika $n - 1$, i tako redom sve dok se integral ne svede do potencije nazivnika $n = 1$, u kojem slučaju se integral supstitucijom svodi na tablični.

Tip C: $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$**, gdje je** $b^2-4ac<0$.

Rješavamo supstitucijom $t = ax^2+bx+c$, $\mathrm{d}t = (2ax+b)\,\mathrm{d}x$. Nakon toga potrebno je u brojniku izmisliti $(2ax+b)\,\mathrm{d}x$.

Razlika u odnosu na tip B je x u brojniku. Primijeti da je sada supstitucija drugačija! Dijelom se ovaj integral ipak svodi na tip B.

Primjer. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+4}\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix}\text{DERIVACIJA OD } x^2-2x+4 \text{ JEST } 2x-2\\ \text{ZATO U BROJNIKU IZMIŠLJAM}\\ 2x-2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-2x+4}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x-2+2}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx}_{\left\{\begin{matrix}t=x^2-2x+4\\ dt=(2x-2)dx\end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|x^2-2x+4|} + \frac{1}{2}\int\frac{2}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| + \underbrace{\int\frac{dx}{x^2-2x+4}}_{\text{TIP B VIDI PRETHODNU STRANU}} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Dalje, pogledajmo kako riješiti **tip C** kada je potencija u nazivniku $n=2$:

$$\begin{aligned}
\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-2x+4)^2} &= \left\{\begin{matrix}\text{ako } u = x^2-2x+4\\ \text{tada } \mathrm{d}u = 2x-2\end{matrix}\right., \text{ a želim dobiti } \mathrm{d}u \text{ u brojniku}\Bigg\}\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2-2x+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}\mathrm{d}x}_{=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = \frac{-1}{x^2-2x+4}} + \underbrace{\int\frac{1}{(x^2-2x+4)^2}\mathrm{d}x}_{\textbf{tip B}\text{: vidi prethodni } \cancel{\text{primjer}} \text{ STRANU}}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C
\end{aligned}$$

Vidimo da se tip C jednostavno svodi na tip B. To će vrijediti za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Samostalno riješiti: $\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x =$

Integral racionalne funkcije

Ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak stupnju polinoma iz nazivnika tada je prvi korak u riješavanju takvog integrala da se polinom iz brojnika podijeli sa polinomom iz nazivnika:

Primjer: $\int \frac{x^3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x = \int (x-3)\,dx + \underbrace{\int \frac{4x+15}{x^2+3x+5}dx}_{\text{TIP C}} = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\underbrace{\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx}_{\text{TIP C}} + 9\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+3x+5}}_{\text{TIP B}} = (*)$

$x^3 : (x^2+3x+5) = x - 3 + \frac{4x+15}{x^2+3x+5}$

$-(x^3+3x^2+5x)$

$-3x^2-5x$

$-(-3x^2-9x-15)$

$4x+15$

KADA JE $x^2+3x+5=0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} \notin \mathbb{R}$

NEMA NULTOČAKA

DERIVACIJA ~~OD~~ NAZIVNIKA

$(x^2+3x+5)' = 2x+3$

$x^2+3x+5 = \left(x^2+\underset{2\cdot\frac{3}{2}}{3x}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+5 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \left\{\begin{array}{l} t = x+\frac{3}{2} \\ dt = dx \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{11}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}} \operatorname{arctan} \frac{t}{\sqrt{\frac{11}{4}}} \Rightarrow (*) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x^2+3x+5| + \frac{9}{\frac{\sqrt{11}}{2}} \operatorname{arctan}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right)$$

»Rastavom na parcijalne razlomke«[4] svaki integral racionalne funkcije kojem je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika može se svesti na neki od prije navedena tri tipa integrala: A, B ili C.

Primjer. Riješi integral $\int \frac{x^3+2x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x = \int (x-3)\,dx + \int \frac{15x-12}{x^2-3x-4}dx = (**)$

Koraci riješavanja:

1. dijeljenjem svedi najveću potenciju brojnika ispod potencije nazivnika,
2. takav integrand rastavi na parcijalne razlomke,
3. integriraj parcijalne razlomke.

$(x^3+2x) : (x^2+3x-4) = x - 3 + \frac{15x-12}{x^2+3x-4}$

$-(x^3+3x^2-4x)$

$-3x^2+6x$

$-(-3x^2-9x+12)$

$15x-12$

KORIJENI OD $x^2+3x-4=0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$

$x_1 = -4,\ x_2 = 1$

RASTAV NA PARCIJALNE RAZLOMKE

$\frac{15x-12}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)\cdot(x-1)}$

$\Rightarrow 15x - 12 = Ax - A + Bx + 4B$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{uz } x:\ 15 = A + B \\ \text{bez } x:\ -12 = -A + 4B \end{array}\right.$ +

$3 = 5B \Rightarrow B = \frac{3}{5} \rightarrow A = 15 - \frac{3}{5}$, $A = \frac{72}{5}$

$\int \frac{15x-12}{x^2-3x-4}dx = \int \frac{72/5}{x+4}dx + \int \frac{\frac{3}{5}}{x-1}dx$

$\int \frac{dx}{x+4} = \{\text{TIP A}\} = \ln|x+4|$

$\int \frac{dx}{x-1} = \{\text{TIP A}\} = \ln|x-1|$

$\Rightarrow (**) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{72}{5}\ln|x+4| + \frac{3}{5}\ln|x-1| + C$

---

[4]Ako je zadana racionalna funkcija oblika u kojem je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tada rastav na parcijalne razlomke prvo zahtjeva da se odrede svi faktori polinoma $Q(x)$, a to mogu biti samo polinomi stupnja jedan i polinomi stupnja dva bez realnih nultočaka. Također treba uzeti u obzir kratnost svakog takvog faktora. Npr. polinom $Q(x) = x^4 + x^2$ može se zapisati kao $Q(x) = x^2\,(x^2+1)$. Iz toga se vidi da je faktor x kratnosti 2, a faktor x^2+1 kratnosti 1.

Nakon toga se racionalna funkcija želi zapisati kao zbroj razlomaka kojima se u nazivnicima pojavljuju po jedan od pronađenih faktora $Q(x)$. Pritom se faktori višekratne kratnosti pojavljuju više puta, onoliko puta kolika je kratnost faktora, ali svaki puta s različitom potencijom. U brojniku parcijalnih razlomaka stavljamo neodređene koeficijente i to tako da za nazivnike koji su se nastali od faktora stupnja 1 (bez obzira na kratnost) u brojnik postavljamo jedan neodređeni koeficijent, a za nazivnike koji su nastali od faktora stupnja 2 (bez obzira na kratnost) u brojnik postavljamo polinom stupnja 1 sa neodređenim koeficijentima $(C_1x + C_2)$. U razmatranom primjeru rastav na parcijalne razlomke glasi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ gdje još treba odrediti nepoznate koeficijente A, B, C, D. Nepoznate koeficijente možemo odrediti svođenjem na zajednički nazivnik i uspoređivanjem dobivenog brojnika sa polinomom $P(x)$. Izrazi uz iste potencije moraju biti jednaki. Time se dobije sustav linearnih jednadžbi čija riješenja su traženi nepoznati koeficijenti.

Drugi primjer:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \\ \left\{\begin{array}{lll} A = \frac{1}{2}, & C = \frac{-1}{2} & E = \frac{-1}{2}, \\ B = \frac{1}{4}, & D = \frac{1}{4}, & F = 0 \end{array}\right\} &= \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{4(1+x)^2} + \frac{1-2x}{4\,(1+x^2)} - \frac{x}{2\,(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Primjer. Riješi integral $\int \frac{(x^4-2x^3)\,\mathrm{d}x}{(4x^2+3x-1)(x-1)} = \frac14\frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x + \frac{3}{10}\ln|x+1| + \frac{7}{960}\ln\left|x-\frac14\right| - \frac16\ln|x-1| + C$

STUPANJ BROJNIKA: 4

STUPANJ NAZIVNIKA: 3

NAZIVNIK: $4x^3+3x^2-x-4x^2-3x+1 = 4x^3-x^2-4x+1$

$$(x^4-2x^3) : (4x^3-x^2-4x+1) = \frac14 x - \frac{7}{16} + \frac{\frac{9}{16}x^2-2x+\frac{7}{16}}{(4x^2+3x-1)(x-1)} = \frac14 x - \frac{7}{16} + \frac{\frac{3}{10}}{x+1} + \frac{7/960}{x-\frac14} + \frac{-\frac16}{x-1}$$

$$-\left(x^4-\frac14x^3-x^2+\frac14x\right)$$
$$-\frac74x^3+x^2-\frac14x$$
$$-\left(-\frac74x^3+\frac{7}{16}x^2+\frac74x-\frac{7}{16}\right)$$
$$\frac{9}{16}x^2-2x+\frac{7}{16}$$

$4x^2+3x-1=0$

za $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot4} = \frac{-3\pm5}{8}$ $\Rightarrow$ $4x^2+3x-1 = 4(x+1)\left(x-\frac14\right)$

$x_1=-1$

$x_2=\frac14$

$$\frac{\frac{9}{16}x^2-2x+\frac{7}{16}}{(4x^2+3x-1)(x-1)} = \frac{\frac{9}{16}x^2-2x+\frac{7}{16}}{4(x+1)(x-\frac14)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-\frac14}+\frac{C}{x-1}$$
$$= \frac{A(x-\frac14)(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)(x-\frac14)}{(x+1)(x-\frac14)(x-1)}$$
$$= \frac{Ax^2-\frac54Ax+\frac14A+Bx^2-B+Cx^2+\frac34Cx-\frac14C}{(x+1)(x-\frac14)(x-1)}$$

uz x^2: $\frac{9}{64} = A+B+C$

uz x: $-\frac12 = -\frac54A+\frac34C$

bez x: $\frac{7}{64} = \frac14A-B-\frac14C$

SUSTAV

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{9}{64} \\ -\frac54 & 0 & \frac34 & -\frac12 \\ \frac14 & -1 & -\frac14 & \frac{7}{64} \end{array}\right] \Rightarrow A=\frac{3}{10},\ B=\frac{7}{960},\ C=-\frac16$$

Riješi $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = 2\underbrace{\int\frac{1}{x+1}dx}_{=\ln|x+1|} + \underbrace{\int\frac{1}{(x+1)^2}dx}_{=-\frac{1}{x+1}} - \underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{=\ln|x^2+x+1|} - \underbrace{\int\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx}_{=\text{TIP C}} = 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \ln|x^2+x+1| - (\ldots)$

Pazi! Višekratni korijen u nazivniku.

$$= \frac13\frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac23\cdot\frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{x+\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}\right)$$

RASTAV NA PARCIJALNE RAZLOMKE:

x^2+x+1 NEMA REALNE KORIJENE

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-2x-1}{x^2+x+1}+\frac{-x-1}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{A(x+1)(x^2+x+1)^2+B(x^2+x+1)^2+(Cx+D)(x+1)^2(x^2+x+1)+(Ex+F)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

OVAJ BROJNIK TREBA IZMNOŽITI I USPOREDITI S JEDINICOM U BROJNIKU LIJEVO

SLIJEDI:

bez x: $1 = A+B+D+F$

uz x: $0 = 3A+2B+C+3D+E+2F$

uz x^2: $0 = 5A+3B+3C+4D+2E+F$

uz x^3: $0 = 5A+2B+4C+3D+E$

uz x^4: $0 = 3A+B+3C+D$

uz x^5: $0 = A+C$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&1&0&1&0&1&1 \\ 3&2&1&3&1&2&0 \\ 5&3&3&4&2&1&0 \\ 5&2&4&3&1&0&0 \\ 3&1&3&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0 \\ 3&1&3&1&0&0&0 \\ 5&2&4&3&1&0&0 \\ 5&3&3&4&2&1&0 \\ 3&2&1&3&1&2&0 \\ 1&1&0&1&0&1&1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2-3R1 \\ R3-5R1 \\ R4-5R1 \\ R5-3R1 \\ R6-R1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&-1&3&1&0&0 \\ 0&3&-2&4&2&1&0 \\ 0&2&-2&3&1&2&0 \\ 0&1&-1&1&0&1&1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3-R2 \\ R4-3R2 \\ R5-2R2 \\ R6-R2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&-1&2&1&0&0 \\ 0&0&-2&1&2&1&0 \\ 0&0&-2&1&1&2&0 \\ 0&0&-1&0&0&1&1 \end{array}\right] \sim \ \ldots \ \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&2 \\ 0&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&-2 \\ 0&0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&1&-1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=-1 \\ E=-1 \\ F=-1 \end{cases}$$