

# Limes (granična vrijednost) i neprekidnost

Točke u višedimenzionalnom prostoru označavati ćemo sa masnim slovima. Npr.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ . Sa  $K(\mathbf{x}, \delta)$  označavamo kuglu oko točke  $\mathbf{x}$  radijusa  $\delta$ .

**DEFINICIJA LIMESA FUNKCIJE.** Skalarna funkcija  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ima limes  $L$  u točki  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

- ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da za svaki  $\mathbf{y} \in \Omega$  takav da  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  i  $\mathbf{y} \in K(\mathbf{x}, \delta)$  vrijedi još i  $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ ,
- ako za svaki niz  $\{\mathbf{y}_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega$  takav da  $\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}$  vrijedi  $f(\mathbf{y}_k) \rightarrow L$ .

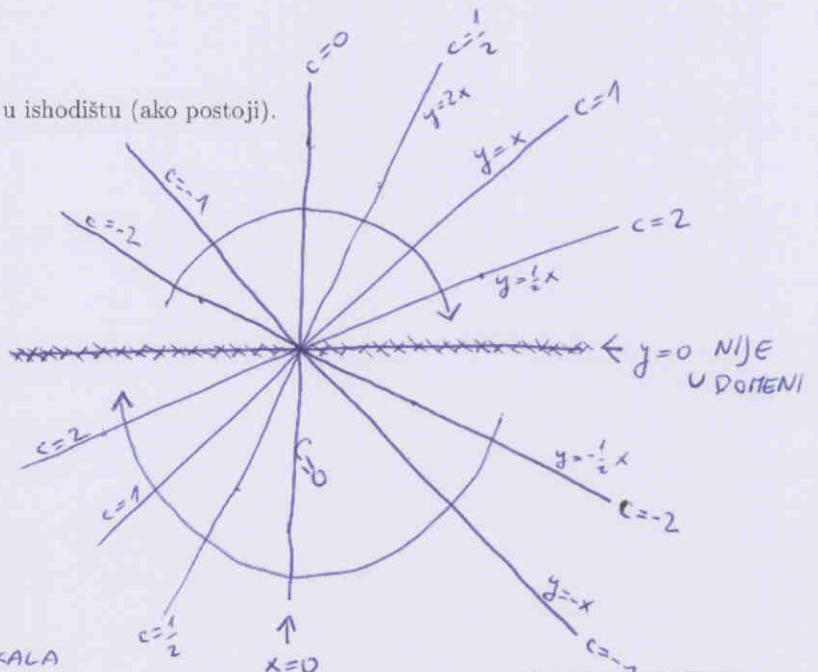
**POSLEDICA:** funkcija nema limes na mjestima gdje se dodiruju ili križaju dvije različite razinske krivulje (ili razinske plohe)!

**DEFINICIJA NEPREKIDNOSTI.** Funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je neprekidna ako u svakoj točki  $\mathbf{x} \in \Omega$  postoji limes funkcije i jednak je  $f(\mathbf{x})$ .

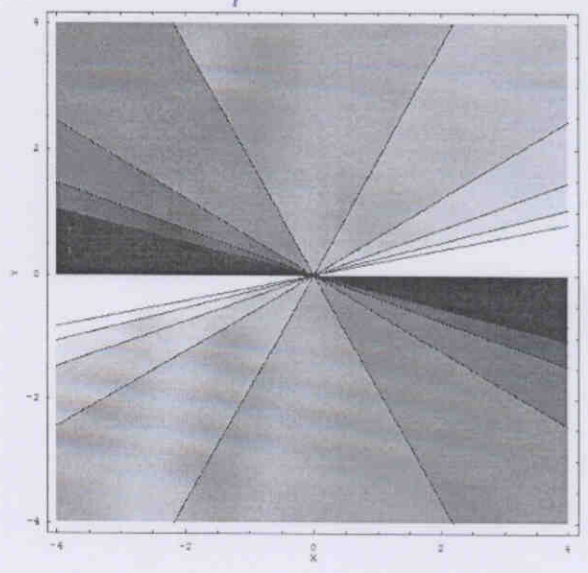
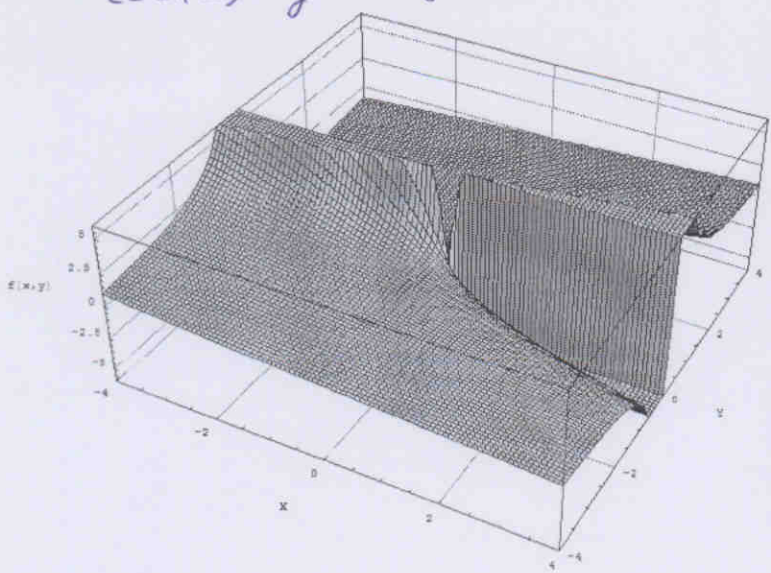
**Primjer**  $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Odrediti domenu, kodomenu, razinske krivulje i limes u ishodištu (ako postoji).

$D(f) = \{(x, y) : y \neq 0\}$   
 $\text{Im}(f) = ?$   
 $f(x, y) = c ?$   
 $\frac{x}{y} = c$   
 $x = c \cdot y \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}$   
**RAZINSKE KRIVULJE**  
 $f(x, y) = c$   
 $\frac{x}{y} = c$   
 Pr.  $c=0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x=0$  VERTIKALA  
 $c=1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow y=x$   
 $c=2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$   
 $c=-1 \Rightarrow \frac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = -x$



**RAZINSKE KRIVULJE SJEKU SE U ISHODIŠTU DAKLE, NEMA LIMESA U ISHODIŠTU.**



Slika 2.0.11:  $f(x, y) = \frac{x}{y}$

## Parcijalne derivacije prvog reda

Neka je zadana skalarna funkcija više varijabli  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada se parcijalna derivacija funkcije  $f$  po varijabli  $x$  u točki  $(x, y, z, \dots)$  označava sa  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ili  $\partial_x f$  i računa na način da se

- sve ostale varijable  $y, z, \dots$  osim varijable  $x$  smatra za konstante i
- izračuna derivacija funkcije jedne varijable  $x \mapsto f(x, y, z, \dots)$

Za druge varijable slično. Na primjer  $\frac{\partial f}{\partial y}$  (druga oznaka  $\partial_y f$ ) se računa tako da se sve varijable osim  $y$  smatraju za konstante i formalno računa derivacija funkcije  $y \mapsto f(x, y, z, \dots)$ .

Još jedna vrsta oznake za parcijalnu derivaciju je oznaka  $\partial_k f$  koja označava parcijalnu derivaciju po  $k$ -toj varijabli, dakle sve varijable osim  $k$ -te se drže konstantama i računa se derivacija funkcije  $x_k \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m)$

Ako postoje sve parcijalne derivacije prvog reda kažemo da je skalarna funkcija derivabilna.

Primjer. Izračunaj parcijalne derivacije prvog reda za  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot y^{-1}) = \overset{\substack{\text{IZVLAČEMJE KONSTANTE} \\ \text{ISPRED DERIVACIJE}}}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y^{-1}) = x \cdot (-1) y^{-2} = -\frac{x}{y^2}$$

Zadatak. Izračunaj parcijalne derivacije prvog reda za  $h(x, y, z) = z \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( z \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) = z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) = z \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{z}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{z}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{yz}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( z \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) = z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) = z \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{z}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{(-x)}{y^2} = \frac{-xz}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( z \cdot \underbrace{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{NE SADRŽI } z} \right) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

### Diferencijal i tangencijalna ravnina

TOTALNI DIFERENCIJAL (ili kraće DIFERENCIJAL) skalarne funkcije  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  u točki  $T_0(x_0, y_0, \dots)$  je izraz (linearni funkcional, matrica ili vektor)

$$df(T_0) \equiv \left[ \frac{\partial f(T)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(T)}{\partial y} \quad \dots \right], \quad df(T_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

koji aproksimira funkciju  $f$  u točki  $T(x, y, \dots)$  blizu točke  $T_0$  na način da je

$$f(T) - f(T_0) \approx \underbrace{df(T_0)}_{\left[ \frac{\partial f(T)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(T)}{\partial y} \quad \dots \right]} (T - T_0) = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

FUNKCIJA JE DIFERENCIJALNA TAMO Gdje POSTOJI DIFERENCIJAL.

Štoviše mora vrijediti uvjet (detalje vidi u knjizi na str. 246):

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{f(T) - f(T_0) - df(T_0)(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0. \tag{2.0.1}$$

Primjer. Izračunati diferencijal funkcije  $f(x, y) = 5x^3y^2 - 9$  u točki  $T(3, 1)$ , izraziti ga u obliku matrice i pomoću njega aproksimirati funkciju  $f$  u blizini točke  $T$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (5x^3y^2 - 9) = 5y^2 \cdot 3x^2 = 15x^2y^2 & \frac{\partial f(T)}{\partial x} &= 15 \cdot 3^2 \cdot 1^2 = 135 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (5x^3y^2 - 9) = 5x^3 \cdot 2y = 10x^3y & \frac{\partial f(T)}{\partial y} &= 10 \cdot 3^3 \cdot 1 = 270 \\ df(T) &= [135 \quad 270] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(3, 1) \approx [135 \quad 270] \begin{bmatrix} x-3 \\ y-1 \end{bmatrix} = 135(x-3) + 270(y-1) \\ &= 5 \cdot 3^3 \cdot 1 - 9 = 126 & \Rightarrow f(x, y) &\approx 135(x-3) + 270(y-1) + 126 \\ & & \Rightarrow f(x, y) &\approx 135x + 270y - 549 \text{ oko } T(3, 1) \end{aligned}$$

Diferencijal se može zapisivati i u obliku diferencijalne forme:

$$df(T_0) = \frac{\partial f(T)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(T)}{\partial y} dy + \dots \quad \xrightarrow{\text{PRIMJER}} \quad df(3, 1) = 135 dx + 270 dy$$

Primjer. Izračunati diferencijal funkcije  $f(x, y) = x^2 \cos xy$  i prikazati ga u obliku diferencijalne forme.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cos xy) = 2x \cdot \cos(xy) + x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot y = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos xy) = x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot x = -x^3 \sin(xy) \end{aligned}$$

$$df(x, y) = (2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)) dx - x^3 \sin(xy) dy$$

Paziti: može se dogoditi da u točki postoje sve parcijalne derivacije, ali ne postoji diferencijal. Tada ne vrijedi gornja formula označena sa (2.0.1), odnosno parcijalne derivacije nisu neprekidne. Vidi primjer 5.2.4 u knjizi na strani 247. Treba znati da vrijedi:

1.  $f$  je diferencijabilna u točki  $T \implies f$  je neprekidna u točki  $T$ ,
2.  $f$  je diferencijabilna u točki  $T \implies$  sve parcijalne derivacije od  $f$  postoje u točki  $T$ ,
3. sve parcijalne derivacije od  $f$  su neprekidne u točki  $T \implies f$  je diferencijabilna u točki  $T$ .

Primjer. Nacrtati razinske krivulje, odrediti domenu i kodomenu, ispitati neprekidnost, derivabilnost i diferencijal funkcije  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ .

$$D(\sqrt[3]{\cdot}) = \mathbb{R} \implies D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = c \implies \sqrt[3]{xy} = c$$

$$\implies xy = c^3 \implies \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\implies y = c^3 \cdot \frac{1}{x}$$

RAZINSKE KRIVULJE

$$c=0 \implies x \cdot y = 0 \implies x=0 \text{ ili } y=0$$

$$c=1 \implies x \cdot y = 1 \implies y = \frac{1}{x}$$

$$c=-1 \implies x \cdot y = -1 \implies y = -\frac{1}{x}$$

$$c=2 \implies x \cdot y = 2 \implies y = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$c=\frac{1}{2} \implies x \cdot y = \frac{1}{2} \implies y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$c=-2 \implies x \cdot y = -2 \implies y = -2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$c=-\frac{1}{2} \implies x \cdot y = -\frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \sqrt[2]{\frac{y}{x^2}} \quad \text{NAZIVNIK JE NULA ZA } x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \sqrt[2]{\frac{x}{y^2}}$$

$$D(\partial_x f) = \{(x, y) : x \neq 0\}$$

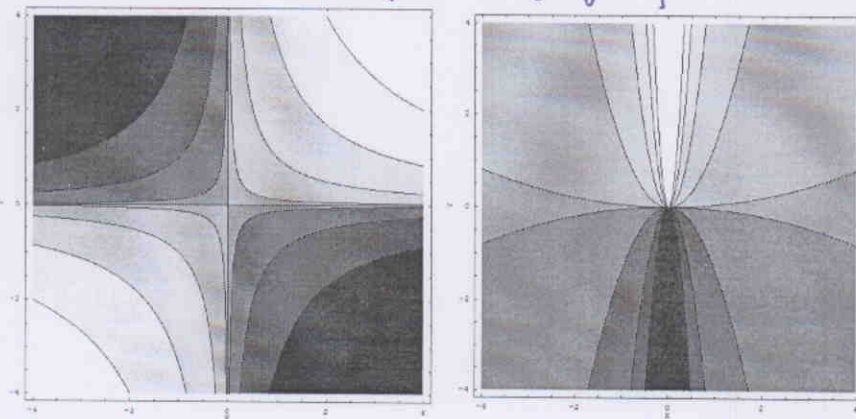
Slika 2.0.12:  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

$$D(\partial_y f) = \{(x, y) : y \neq 0\}$$

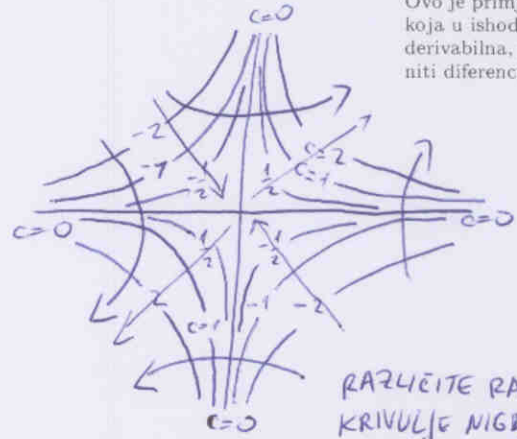
$f$  je derivabilna na skupu:

$$D(\partial_x f) \cap D(\partial_y f) = \{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}$$

derivacija je neprekidna na istom skupu  $\implies f$  je diferencijabilna na  $\{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}$ .  
 $f$  nije diferencijabilna na  $\{(x, y) : x=0 \text{ ili } y=0\}$

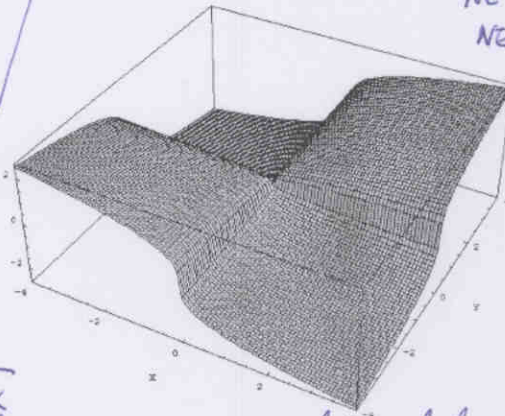


Slika 2.0.13:  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$  i derivacija  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \sqrt[2]{\frac{y}{x^2}}$



Ovo je primjer funkcije koja u ishodištu nije derivabilna, pa dakle niti diferencijabilna.

RAZLIČITE RAZINSKE KRIVULJE NIGDJE SE NE SIJEKU  $\implies f$  JE NEPREKIDNA



TEŽI

Zadatak. Odrediti domenu, ispitati neprekidnost, derivabilnost i diferencijal funkcije  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Ovo je primjer funkcije koja je neprekidna, svuda derivabilna, ali nije diferencijabilna u ishodištu.

$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 $f(x, y) = c$

$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$

$c=0 \Rightarrow x=0$  ili  $y=0$

$c=1 \Rightarrow xy = \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2y^2 = x^2+y^2$

$x^2y^2 - y^2 = x^2$

$y^2(x^2-1) = x^2$

$y^2 = \frac{x^2}{x^2-1}$

$y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \Rightarrow x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x$  nije blizu nule.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$   
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

neprekidna osim možda u ishodištu

diferencijal  $df = \left[ \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$  postoji osim u ishodištu.

RAZLIČITE RAZINSKE KRVULJE SE NE Sijeku u ISHODIŠTU, PA U NITI U ISHODIŠTU NEMA PREKID.

Tangencijalna ravnina na graf funkcije u nekoj točki postoji kada postoji i diferencijal u toj točki. Jednadžba tangencijalne ravnine u točki  $(T_0, f(T_0)) = (x_0, y_0, \dots, t_0)$  usko je vezana uz diferencijal i glasi:

$$t - \underbrace{t_0}_{=f(T_0)} = df(T_0) (T - T_0)$$
  
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(T_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(T_0)}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Primjer. Pronaći tangentu na graf funkcije  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  u točki grafa koja odgovara koordinati  $x = -1$ .

$f(-1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

$t - (-1) = 1 [x - (-1)]$

$t + 1 = x + 1$

$t = x$

$y = x$  je tangenta na graf funkcije  $f$  u točki  $T(-1, -1)$

Primjer. Pronaći ravninu koja dira graf funkcije  $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$  povučenu u točki  $(4, 1, z_0)$  tog grafa.

$z_0 = f(4, 1) = 1 \cdot \sqrt{4} - 1^2 - 4 + 6 = 2 - 1 - 4 + 6 = 3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ ,  $df(4, 1) = \left[ -\frac{3}{4} \quad 6 \right]$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x} - 2y + 6$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = 2 - 2 + 6 = 6$

$z - z_0 = df(4, 1) \begin{bmatrix} x - 4 \\ y - 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{4}(x - 4) + 6(y - 1)$

$z - 3 = -\frac{3}{4}x + 3 + 6y - 6$

$z = -\frac{3}{4}x + 6y$

Zadatak. Izračunati tangencijalnu ravninu plohe  $z = x^2y$  u točki  $(2, 1, 4)$ .

$\begin{matrix} \uparrow \uparrow \uparrow \\ x_0 \ y_0 \ z_0 \end{matrix}$

$$f(x, y) = x^2y$$

$$\partial_x f = 2xy$$

$$\partial_x f(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$\partial_y f = x^2$$

$$\partial_y f(2, 1) = 2^2 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_x f(2, 1) = 4 \\ \partial_y f(2, 1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow df(2, 1) = [4 \ 4]$$

$$z - z_0 = [4 \ 4] \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

$$z - 4 = 4(x - 2) + 4(y - 1)$$

$$z = 4x + 4y - 8 - 4 + 4$$

$$z = 4x + 4y - 8$$