Parcijalne derivacije drugog reda

Parcijalne derivacije drugog reda definiramo na osnovi parcijalnih derivacija prvog reda, tako da uzastopce parcijalno deriviramo po navedenim varijablama. Na primjer:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Koristimo skraćeni zapis: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$.

Koristimo skraćeni zapis: $\partial_{xy} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Vrijedi (Schwartz, vidi Teorem 5.2.4 knjiga str. 253): ako je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidna u okolini neke točke onda je u toj točki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Primjer. Izračunati sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x, y) = x^2 y^3 + x^4 y$ i uvjeriti se u ispravnost Schwartzovog teorema.

$\partial_x f = 2x \cdot y^3 + 4x^3 y = 2xy^3 + 4x^3 y \Longrightarrow \begin{cases} \partial_{xx} f = 2y^3 + 12x^2 y \\ \partial_{yx} f = 6xy^2 + 4x^3 \end{cases}$

$\partial_y f = x^2 \cdot 3y^2 + x^4 \cdot 1 = 3x^2 y^2 + x^4 \Longrightarrow \begin{cases} \partial_{xy} f = 6xy^2 + 4x^3 \\ \partial_{yy} f = 6x^2 y \end{cases}$

Schwartzov teorem: $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$

Zbilja: $6xy^2 + 4x^3 = 6xy^2 + 4x^3$

Lokalni ekstremi skalarne funkcije

Definicije

- Lokalni maksimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz okoline točke T_0 vrijedi $f(T) \leq f(T_0)$.
- Globalni maksimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz domene funkcije vrijedi $f(T) \leq f(T_0)$.
- Lokalni minimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz okoline točke T_0 vrijedi $f(T) \geq f(T_0)$.
- Globalni minimum funkcije f je točka T_0 takva da za svaku točku T iz domene funkcije vrijedi $f(T) \geq f(T_0)$.
- Lokalnim ekstremima nazivamo sve lokalne maksimume i minimume, a globalnim ekstremima sve globalne maksimume i minimume.
- T je stacionarna točka funkcije f ako je $\mathrm{d}f(T) = 0$, dakle sve parcijalne derivacije prvog reda u točki T su jednake nuli.

Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem (vidi Teorem 5.2.9 knjiga str. 263)
Neka skalarna funkcija f ima neprekidne sve parcijalne derivacije drugog reda u okolini stacionarne točke T. Tvorimo determinante redom

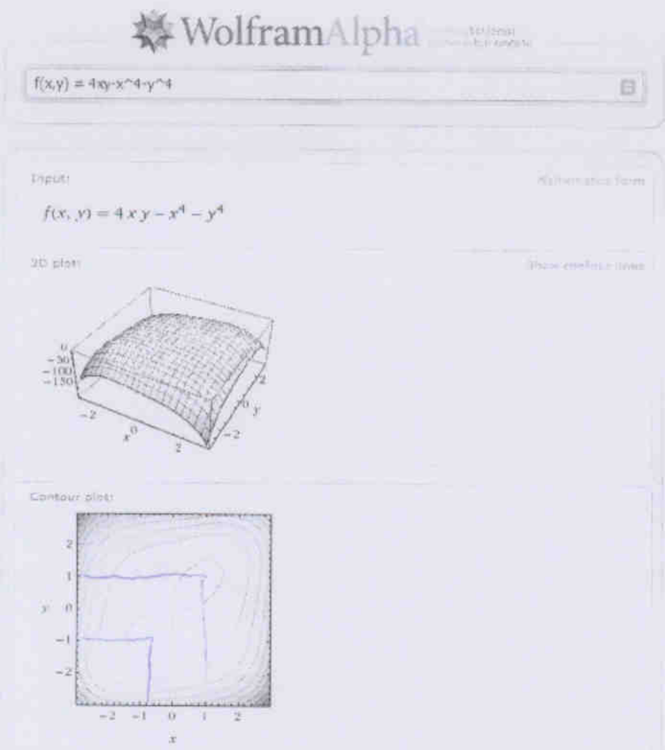
Ovo je važno!

$$\underbrace{|\partial_{xx} f(T)|}_{1.},\quad \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_{xx} f(T) & \partial_{xy} f(T) \\ \partial_{yx} f(T) & \partial_{yy} f(T) \end{vmatrix}}_{2.},\quad \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_{xx} f(T) & \partial_{xy} f(T) & \partial_{xz} f(T) \\ \partial_{yx} f(T) & \partial_{yy} f(T) & \partial_{yz} f(T) \\ \partial_{zx} f(T) & \partial_{zy} f(T) & \partial_{zz} f(T) \end{vmatrix}}_{3.}, \ldots$$

- ako su gornje determinante sve redom pozitivne tada f ima lokalni minimum u točki T,
- ako su neparne determinante u gornjem nizu negativne, a parne pozitivne tada f ima lokalni maksimum u točki T,
- ako je barem jedna parna determinante negativna ili ako su dvije neparne različitog predznaka tada f nema u točki T lokalni ekstrem već tzv. sedlastu točku,
- a u ostalim slučajevima ne možemo donijeti nikakav zaključak.

Primjer. Ispitati domenu, kodomenu, neprekidnost, derivabilnost, diferencijabilnost i ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Kada vježbate kod kuće možete se poslužiti alatom poput web stranice Wolfram Alpha.



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

kodomena $\mathbb{R}$

derivacija

$\left.\begin{array}{l} \partial_x f = 4y - 4x^3 \\ \partial_y f = 4x - 4y^3 \end{array}\right\}$ neprekidne svugdje

$\Downarrow$

POSTOJI DIFERENCIJAL SVUGDJE

$\Downarrow$

NEPREKIDNOST SVUGDJE

ZAŠTO? VIDI 1., 2. i 3. NA STRANI 87.

EKSTREMI NA IDUĆOJ STRANI

GDJE SU STACIONARNE TOČKE ?

TAMO GDJE JE $df(T)=0$

$$\begin{bmatrix} 4y-4x^3 & 4x-4y^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$4y-4x^3 = 0 \qquad\qquad 4x-4y^3=0$$

$$y = x^3 \qquad\qquad x = y^3 = (x^3)^3 = x^9$$

$$x = x^9$$
$$x^9 - x = 0$$
$$x(x^8-1)=0$$
$$x(x^4-1)(x^4+1)=0$$
$$x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0$$
$$x(x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\geq 0}\underbrace{(x^4+1)}_{\geq 0}=0$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=-1 \\ y=0 & y=1 & y=-1 \end{matrix}\right\} \text{ ZBOG } y=x^3$$

STACIONARNE TOČKE:

$T_1(0,0)$
$T_2(1,1)$
$T_2(-1,-1)$

PARCIJALNE DERIVACIJE DRUGOG REDA:

$\partial_{xx} f = -12x^2$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 4$
$\partial_{yy} f = -12y^2$

DOVOLJNI UVJETI ZA EKSTREM:

DETERMINANTE $\quad \begin{vmatrix} -12x^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{vmatrix}$

$T_1(0,0) \quad |0| = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \xrightarrow[\text{JE NEGATIVNA}]{\text{PARNA DETERMINANTA}}$ SEDLASTA TOČKA

$T_2(1,1) \quad |-12| = -12 \quad \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 144-16 = 128 \xrightarrow[\text{ISPOD}]{\text{VIDI}}$ LOKALNI MAKSIMUM

$T_3(-1,-1) \quad |-12| = -12 \quad \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 128 \xrightarrow[\text{NEPARNA DET JE NEG}]{\text{PARNA DET JE POZ}}$ LOKALNI MAKSIMUM

1. determinanta $\qquad$ 2. determinanta

VIDI PRIMJER 1. NA STRANI 99.

Zadatak. Ispitati funkciju $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

$\partial_x f = 6x - 2y$

$\partial_y f = -2x + 2y - 8$

NUŽAN UVJET ZA EKSTREM:

$6x - 2y = 0 \Rightarrow 6x = 2y$

$-2x + 2y - 8 = 0$

$4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 6$

$\Rightarrow T(2,6)$

$A = \partial_{xx} f = 6 > 0$

$B = \partial_{xy} f = -2$

$C = \partial_{yy} f = 2$

$\Delta = AC - B^2$

$\Delta = 12 - 4 = 8 > 0$

PRAVILO (STRANA 99.):

ZBOG $\Delta > 0$, $A > 0$

U TOČKI $T(2,6)$ POSTIŽE SE LOKALNI MINIMUM

$f(2,6) = 3 \cdot 4 - 24 + 36 - 48 = -24$

TO JE JEDINI LOKALNI EKSTREM

Zadatak. Ispitati funkciju $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$.

$\partial_x f = 3x^2 - 3y$

$\partial_y f = -3x - 3y^2$

NUŽAN UVJET ZA EKSTREM

$$\begin{aligned} \partial_x f = 0 &\Longleftrightarrow \\ \partial_y f = 0 &\Longleftrightarrow \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ -3x - 3y^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3x^2 &= 3y \\ 3x &= -3y^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x^2 &= y \\ x &= -y^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow y \geq 0 \\ &\Rightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

$(-y^2)^2 = y \Leftrightarrow y^4 = y \Leftrightarrow y^4 - y = 0$

$y(y^3 - 1) = 0$

$y(y-1)\underbrace{(y^2+y+1)}_{>0} = 0$

$y = 0$, $x = 0$ $\Rightarrow T_1(0,0)$

$y = 1$, $x = -1$ $\Rightarrow T_2(-1,1)$

$\partial_{xx} f = 6x$

$\partial_{xy} f = -3$

$\partial_{yy} f = -6y$

U TOČKI $T_0(0,0)$

$A = \partial_{xx} f(0,0) = 0$

$B = \partial_{xy} f(0,0) = -3$

$C = \partial_{yy} f(0,0) = 0$

$\Delta = 0 - 9 = -9 < 0$

PRAVILO (STRANA 99.):

ZBOG $\Delta < 0$ U $T_1(0,0)$ IMAMO SEDLASTU TOČKU.

U TOČKI $T_1(-1,1)$

$A = \partial_{xx} f(-1,1) = -6$

$B = \partial_{xy} f(-1,1) = -3$

$C = \partial_{yy} f(-1,1) = -6$

$\Delta = (-6)\cdot(-6) - (-3)^2 = 27 > 0$

PRAVILO (STRANA 99.):

ZBOG $\Delta > 0, A < 0$ U $T_2(-1,1)$ NALAZI SE LOKALNI MAKSIMUM

$f(-1,1) = 1$

DRUGIH LOKALNIH EKSTREMA NEMA

$|\partial_{xx} f(T)| = |A| = A$ ← 1. determinanta 99

$$\begin{vmatrix} \partial_{xx} f(T) & \partial_{yx} f(T) \\ \partial_{xy} f(T) & \partial_{yy} f(T) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \Delta$$ ← 2. determinanta

Za svaku pojedinu točku (x_0, y_0), kandidata za lokalni ekstrem, označimo:

$A := f_{xx}(x_0, y_0)$, $B := f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, $C := f_{yy}(x_0, y_0)$.

Dalje, označimo $\Delta := AC - B^2$

Vrijedi sljedeće **pravilo**:

Ako za točku (x_0, y_0) kandidata za lokalni ekstrem (točka zadovoljava nužan uvjet) vrijedi:

(1) $\Delta > 0$, onda se u (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:

(a) lokalni maksimum ako je $A < 0$

(b) lokalni minimum ako je $A > 0$

(2) $\Delta < 0$, onda f ne postiže ekstrem u (x_0, y_0), već je (x_0, y_0) tzv. sedlasta točka

(3) $\Delta = 0$, onda ne možemo izvući nikakav zaključak o tome ima li f u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili ne.

Napomena:

Slučaj (2) govori nešto više od same činjenice da u ispitivanoj točki funkcija ne postiže lokalni ekstrem. Naime, ako vrijedi $\Delta < 0$ u nekoj točki-kandidatu za lokalni ekstrem (x_0, y_0), onda u toj točki funkcija f ima tzv. ***sedlo***, što je ekvivalent pojmu stacionarne točke kod funkcije jedne varijable. Naziv "sedlo" u ovom slučaju dobro dočarava izgled plohe funkcije f u okolini točke sedla.

Dalje, komentirajmo ukratko porijeklo veličine Δ. Vrijednosti parcijalnih derivacija u točki (x_0, y_0) mogu se organizirati u sljedeću matricu:

$$H := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

pa vidimo da je $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, dakle upravo determinanta gornje matrice koju zovemo Hesseova matrica. Primijetimo da je $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ prema Schwarzovom teoremu, pa stoga na sporednoj dijagonali u Hesseovoj matrici imamo jednake vrijednosti koje u Δ čine faktor B^2.

Primjer 1 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje:

Najprije nalazimo prve parcijalne derivacije i rješavamo sustav $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:

$f_x(x, y) = 4y - 4x^3 = 0$

$f_y(x, y) = 4x - 4y^3 = 0.$

Imamo $y = x^3$, $x = y^3$. Uvrštanjem $y = x^3$ u drugu jednadžbu dobivao $x = x^9$, što faktoriziranjem postaje

$x(x^8 - 1) = 0$

$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

100

Zadnja dva faktora ne mogu biti jednaka nuli za realan x, pa nam ostaju tri rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Iz $y = x^3$ dobivamo $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, pa ukupno imamo tri točke kandidata za ekstrem: $(0,0)$, $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

Za svaku od ovih točaka provodimo proceduru utvrđivanja koja od njih predstavlja lokalni ekstrem. Da bismo to izračunali, nađimo najprije druge parcijalne derivacije funkcije f:

$f_{xx}(x,y) = -12x^2$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$

$f_{yy}(x,y) = -12y^2$.

Uvrštavanjem vrijednosti x i y koordinata u ove izraze dobivat ćemo za pojedine točke-kandidate vrijednosti za A, B i C, redom.

Računamo:

(a) točka $(0,0)$:
$A = f_{xx}(0,0) = 0$, $B = f_{xy}(0,0) = 4$, $C = f_{yy}(0,0) = 0$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$. Dakle, radi se o sedlastoj točki.

(b) točka $(1,1)$:
$A = f_{xx}(1,1) = -12$, $B = f_{xy}(1,1) = 4$, $C = f_{yy}(1,1) = -12$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = 128 > 0$. Dakle, u $(1,1)$ postiže se lokalni ekstrem, i to maksimum, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(1,1)$ iznosi $f(1,1) = 2$.

(c) točka $(-1,-1)$:
$A = f_{xx}(-1,-1) = -12$, $B = f_{xy}(-1,-1) = 4$, $C = f_{yy}(-1,-1) = -12$,
pa je opet $\Delta = 128 > 0$ i radi se o točki lokalnog maksimuma jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(-1,-1)$ opet iznosi $f(-1,-1) = 2$.

Primjer 2 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = y\sin x$.

Rješenje:

Nužan uvjet za lokalne ekstreme daje sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = y\cos x &= 0 \\ f_y(x,y) = \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo za $\cos x$ vrijednost 1 ((za parne k) ili -1 (za neparne k), odakle nužno slijedi da je $y = 0$. Dakle, dobili smo beskonačno mnogo točaka kandidata za ekstrem oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Računamo sada parcijalne derivacije drugog reda:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -y\sin x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti, ovisno o tome je li k paran ili neparan:

101

(a) k paran, tj. $k = 2l$ za $l \in \mathbb{Z}$:
$A = f_{xx}(2l\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}(2l\pi, 0) = \cos(2l\pi) = 1$, $C = f_{yy}(2l\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$, što znači da se su $(k\pi, 0)$, k paran, sedlaste točke

(b) k neparan, tj. $k = 2l + 1$ za $l \in \mathbb{Z}$: slično kao gore, imamo:
$A = f_{xx}((2l+1)\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}((2l+1)\pi, 0) = \cos((2l+1)\pi) = -1$, $C = f_{yy}((2l+1)\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - (-1)^2 = -1 < 0$, pa i u $(k\pi, 0)$, k paran, imamo sedlo.

Konačno, vidimo da ova funkcija nema niti jednu točku u svojoj domeni u kojoj se postiže lokalni ekstrem, već samo beskonačno mnogo sedlastih točaka (i sve su one oblika $(k\pi, 0)$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 3 Odredite lokalne ekstreme funkcije:

ZADANI, A NEKI I RIJEŠENI NA PRETHODNIM STRANICAMA

(1) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

(2) $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

(3) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

(4) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

(5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

(6) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

PREOSTAJE ZA SAMOSTALNO RIJEŠAVANJE NA IDUĆIM STRANICAMA

(7) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

(8) $f(x, y) = xe^y$

(9) $f(x, y) = e^x \sin y$

(10) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Nešto drugačije postupamo ako je funkcija zadana implicitno (u osnovi samo stoga što je formula za nalaženje parcijalnih derivacija prvog reda u tom slučaju definirana drugačije – vidjeti vježbe vezane uz 7. lekciju!).

Primjer 4 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$.

Rješenje:

Definiramo $F(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$ i računamo:

$F_x(x, y, z) = 2x + z$

$F_y(x, y, z) = 4y$

$F_z(x, y, z) = x + 2z$.

Stoga je $z_x(x, y) = -\frac{2x+z}{x+2z}$, a $z_y(x, y) = -\frac{4y}{x+2z}$. Da bismo našli kandidate za lokalne ekstreme, moramo riješiti sustav $z_x(x, y) = z_y(x, y) = 0$, tj. $2x + z = 0 = 4y$. Dobivamo $y = 0$ i $z = -2x$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$ daje $x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ ili $x_2 = -1$, pa je $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Imamo dvije točke koje su kandidati za ekstrem: $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.