

Chapter 3

Obične diferencijalne jednađbe

Diferencijalna jednađba je vrsta jednađbe u kojoj je nepoznanica funkcija i u takvoj jednađbi javlja se i neka derivacija (nepoznate) funkcije. Uz diferencijalnu jednađbu često dolaze još neki dodatni uvjeti koje tražena funkcija treba zadovoljiti. Rješenje diferencijalne jednađbe je svaka funkcija koja zadovoljava zadanu diferencijalnu jednađbu i postavljene dodatne uvjete. Štoviše, rješenja diferencijalnih jednađbi možemo općenitije promatrati kao krivulje. Zbog toga se kod rješavanja diferencijalnih jednađbi ne treba brinuti ako kao rješenje dobijemo krivulju koja ne može biti graf funkcije, na primjer zato što vertikalni pravac siječe tu krivulju u više točaka.

Primjer. Provjeriti da funkcija $f(x) = x^2e^x$ zadovoljava diferencijalnu jednađbu $y'' - 2y' + y = 0$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2e^x \\
 f'(x) &= 2xe^x + x^2e^x \\
 f''(x) &= 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x \\
 &= 2e^x + 4xe^x + x^2e^x
 \end{aligned}
 \left.
 \begin{aligned}
 & \\
 & \\
 &
 \end{aligned}
 \right\}
 \Rightarrow f''(x) - 2 \cdot f'(x) + f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x &= 0 \\
 2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 4xe^x - 2x^2e^x + x^2e^x &= 0 \\
 2e^x &= 0 \quad \text{NE!}
 \end{aligned}$$

Zadatak. Provjeriti da funkcija $f(x) = xe^x$ zadovoljava diferencijalnu jednađbu $y'' - 2y' + y = 0$ i početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= xe^x \quad \textcircled{2} \\
 f'(x) &= e^x + xe^x \\
 f''(x) &= e^x + e^x + xe^x \\
 &= 2e^x + xe^x
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0 \quad \checkmark$$

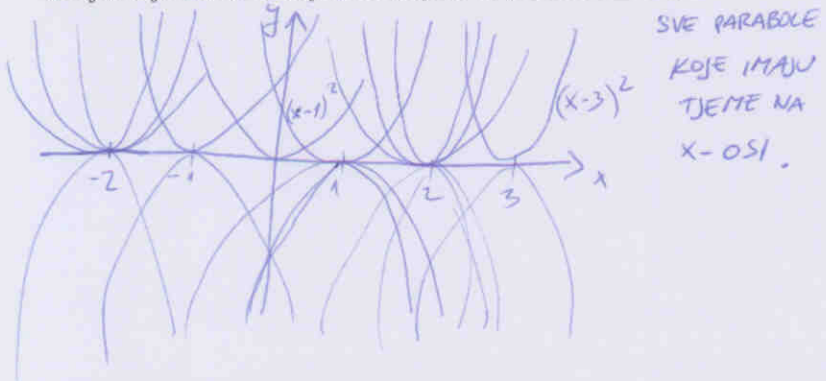
$$\textcircled{2} f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} f'(0) = e^0 + 0 \cdot e^0 = 1 \quad \checkmark$$

ZADOLJAVAJA $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$
DA!

Očito, istu diferencijalnu jednađbu mogu zadovoljavati mnoge različite funkcije. Grafovi svih funkcija koje zadovoljavaju neku diferencijalnu jednađbu nazivaju se integralne krivulje.

Primjer. Zadana je porodica krivulja $y(x) = C_1(x - C_2)^2$. Skiciraj tu porodicu krivulja. Odredi diferencijalnu jednađbu¹ koju zadovoljava ta porodica krivulja.



¹Diferencijalnu jednađbu nalazimo tako da jednađbu zadane porodice deriviramo dok ne dodemo u mogućnost konstante izraziti preko x, y, y', y'', \dots . Zatim tako izražene konstante uvrstimo u polaznu jednađbu porodice krivulja.

$$y(x) = C_1(x - C_2)^2$$

$$y'(x) = 2C_1(x - C_2) \Rightarrow x - C_2 = \frac{y'(x)}{2C_1}$$

$$y''(x) = 2C_1$$

$$C_1 = \frac{y''(x)}{2}$$

$$y(x) = C_1 \left(\frac{y'(x)}{2C_1} \right)^2$$

~~$$y(x) = \frac{y'(x)}{2} \left(\frac{y'(x)}{y''(x)} \right)^2$$~~

$$y(x) = \frac{y'(x)^2}{2y''(x)}$$

$$2yy'' = (y')^2$$

DIFERENCIJALNA
JEDNAĐEBA
REDA 2.

Diferencijalne jednačbe karakterizirane su nečim što se naziva red diferencijalne jednačbe. To je broj najveće derivacije koja se u diferencijalnoj jednačbi pojavljuje. Na primjer, sve dosad spomenute diferencijalne jednačbe su bile reda 2 jer je u svima najveća derivacija koja se pojavljuje druga derivacija.

Sve diferencijalne jednačbe koje ćemo promatrati spadaju u skupinu običnih diferencijalnih jednačbi. Obične diferencijalne jednačbe su diferencijalne jednačbe kojima je nepoznanica funkcija samo jedne varijable.

Neke vrste običnih diferencijalnih jednačbi prvog reda

Materijal koji slijedi preuzet je od autora Ivane Baranović i Miroslava Jerkovića s Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije. Samo se mali broj diferencijalnih jednačbi do danas uspješno riješiti. Nezgoda je da se gotovo svaki malkice drugačiji tip diferencijalne jednačbe treba riješavati na različiti način. Zbog toga u materijalima koji slijede obrađujemo samo nekoliko najosnovnijih tipova diferencijalnih jednačbi. Treba riješiti zadatke u materijalima koji slijede.

Obične diferencijalne jednačbe

Uvodni pojmovi

Diferencijalne jednačbe su jednačbe oblika:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

(ovdje je $y = y(x)$), dakle one koje sadrže osim same funkcije $y(x)$ i njezine derivacije.

Primjer 1 Dane su diferencijalne jednačbe prvog, drugog i četvrtog reda:

- a) $y' + 2xy - y^3 = 0$,
- b) $xy'' + \frac{x}{\ln y} - 2 \sin x = 0$,
- c) $y^{(4)} - 2y'' + \sqrt{y + 3x} = 0$.

Iz primjera je jasno da je red diferencijalne jednačbe jednak najvećem stupnju derivacije koja se u jednačbi pojavljuje. Neka funkcija predstavlja rješenje diferencijalne jednačbe ako ju zadovoljava, tj. ako kad uvrstimo odgovarajuće parametre s lijeve strane (1) s desne zaista dobijemo nulu.

Primjer 2 Provjerite da je funkcija $y(x) = 5x^2$ rješenje sljedeće diferencijalne jednačbe: $xy' = 2y$.

Rješenje: Imamo $xy' - 2y = 0$. U našem primjeru je $y'(x) = 10x$. Sada uvrštavamo naše funkcije u jednačbu:

$$xy' - 2y = x \cdot 10x - 2 \cdot 5x^2 = 10x^2 - 10x^2 = 0$$

pa je $y = 5x^2$ zaista rješenje dane dif. jednačbe.

Zadatak 1 Provjerite da li su navedene funkcije rješenja zadanih dif. jednačbi:

- a) $y'' = y^2 + x^2$, $y(x) = \frac{1}{x}$,
- b) $y'' + y = 0$, $y(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$,
- c) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = x^2e^x$
- d) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y(x) = \frac{C^2 - x^2}{2x}$

Napomena: Kao i uvijek, vrijedi $y' = \frac{dy}{dx}$ i to tako shvaćamo pa je npr $y' + x^2 = y$ isto što i $dy + x^2 dx = y dx$.

Ako je zadana neka diferencijalna jednačba, grafove njenih rješenja nazivamo **integralnim krivuljama**. Ponekad su zadane porodice krivulja i zanima nas koja je njihova pripadna dif. jednačba. Nju nalazimo tako da jednačbu zadane porodice deriviramo dok ne dođemo u mogućnost konstante izrazimo preko x, y, y', y'', \dots i time jednačba familije krivulja postane oblika (1). Dakle, moramo derivirati onoliko puta koliko imamo nezavisnih konstanti.

Primjer 3 Nađite diferencijalnu jednačbu porodice parabola zadane s $y(x) = Cx^2$. Skicirajte tu porodicu.

RJEŠITI

RJEŠENO NA STR. 107.

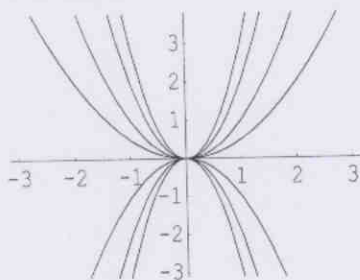
Rješenje: Tražimo prvo dif. jednadžbu, deriviramo jedanput (jer je jedna konstanta) pa imamo:

$$y'(x) = 2Cx \Rightarrow C = \frac{y'}{2x}$$

Sada to uvrštavamo u početnu jednadžbu naših krivulja da se riješimo konstante i dobivamo izraz:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \Rightarrow y = \frac{y'x}{2}$$

što je tražena diferencijalna jednadžba te familije krivulja. Riječ je očito o svim parabolama s tjemenom u ishodištu:



Zadatak 2 Odredite diferencijalne jednadžbe sljedećih familija krivulja i skicirajte te familije:

RIJEŠITI

- a) $y(x) = Cx$,
- b) $y(x) = C_1(x - C_2)^2$, *RIJEŠENO NA STR. 107. I 108.*
- c) $y(x) = Ce^x$,
- d) $x^2 + y^2 = C$.

Separacija varijabli, homogene jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe rješavaju se različitim metodama. Mi ćemo raditi samo one najjednostavnije. Većini tih metoda cilj je diferencijalnu jednadžbu na ovaj ili onaj način (npr supstitucijom) svesti na oblik koji zovemo: **diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama**. Taj oblik znamo direktno riješiti. Naime, kod separiranih varijabli imamo situaciju da se jednadžba može zapisati ovako:

$$y' = g(y)f(x)$$

gdje funkcija g ima za varijablu samo y , a funkcija f samo x (otuda i naziv "separirane varijable"). Sada $g(y)$ prebacujemo na suprotnu stranu a y' zapišemo kao $\frac{dy}{dx}$ i dobivamo:

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zadnju jednakost možemo sada integrirati i dobiti rješenje.

Primjer 4 Riješite diferencijalnu jednađbu: $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje: To je očito slučaj separiranih varijabli, imamo:

$$xyy' = 1 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

pa je $g(y) = \frac{1}{y}$ a $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$. Prebacujemo g na suprotnu stranu i integriramo:

$$ydy = \frac{1-x^2}{x} dx \Rightarrow \int ydy = \int \frac{1-x^2}{x} dx.$$

Riješimo integrale i dobivamo:

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Obično rješenja i ostavljamo u ovakvom implicitnom obliku jer je eksplicitni oblik ponekad nemoguće dobiti. Rješenje koje je u implicitnom obliku nazivamo još i **integralom jednađbe**. Gornja konstanta C upućuje na to da imamo čitavu familiju rješenja ustvari. Njihovi grafovi daju gore spomenute familije integralnih krivulja.

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednađbe sa separiranim varijablama:

a) $xy' - y = y^3$,

b) $y' = -\frac{y}{x}$,

c) $y' \sin x = y \ln y$, \rightarrow RJEŠENO NA STR. 117

d) $(\tan x)dy - ydx = 0$.

Kao što vidimo, rješenja diferencijalnih jednađbi prvog reda nisu jedinstvena već imamo jednu proizvoljnu konstantu (vidi i kod integralnih krivulja, dobijemo čitavu porodicu njih). Ako uzmemo jednađbu drugog reda, dobit ćemo dvije proizvoljne konstante, za onu trećeg reda tri itd. Stoga rješenja dif. jednađbe zovemo i **općim rješenjem**. Ako želimo jedinstveno rješenje, moramo dodati neke zahtjeve kao što su vrijednosti rješenja $y = y(x)$ (ili neke njegove derivacije) u nekoj specijalnoj točki. Da bi imali jedinstveno rješenje, tih uvjeta mora biti koliki je stupanj jednađbe i oni se zovu **početni uvjeti**. Rješenje koje njih zadovoljava zove se **partikularno rješenje**.

Primjer 5 Nadite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete: $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$, $y(0) = 1$.

Rješenje: Rješavamo prvo zadanu diferencijalnu jednađbu:

$$(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{e^x}{1 + e^x}$$

pa slijedi:

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Koristimo početni uvjet da odredimo konstantu C :

$$\frac{1}{2} = \frac{y^2(0)}{2} = \ln(1 + e^0) + C = \ln 2 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2$$

i traženo partikularno rješenje je:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Zadatak 4 Nadite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete:

a) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, y(0) = 1,$

b) $y' \sin x = y \ln y, y(\frac{\pi}{2}) = 1, \Rightarrow$ RIJEŠENO NA STR. 118.

c) $y' = -\frac{y}{x}, y(1) = 2.$

RIJEŠITI

Prijedimo sada na novu grupu jednačbi kao primjer jednačbi koje se jednostavnom supstitucijom svode na jednačbe sa separiranim varijablama: **homogene diferencijalne jednačbe**. To su one jednačbe koje možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

Supstitucija je $y = u \cdot x$ gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija i onda imamo $y' = u' \cdot x + u$.

Primjer 6 Nadite opće rješenje jednačbe $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje: Očito je riječ o homogenoj jednačbi (2) gdje je $f(t) = t - 1$. Uvodimo supstituciju $y = ux$ i dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{x}$$

odnosno

$$\int du = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow u = -\ln x + \ln C.$$

Sada je $y = u \cdot x = (-\ln x + \ln C)x = x \ln \frac{C}{x}$.

Primjer 7 Za jednačbu $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ nadite porodicu integralnih krivulja i izdvojite one krivulje koje prolaze kroz točku $(4, 0)$ odnosno $(1, 1)$.

Rješenje: Imamo:

$$(x^2 + y^2)dx = 2xydy \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

To je homogena jednačba (2) za $f(t) = \frac{1}{2}(t^{-1} + t)$. Supstitucija $y = u \cdot x$ nam daje:

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + u \right) \Rightarrow u' \cdot x = \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}u \Rightarrow u' \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - u^2}{u}.$$

ZADATAK 3. e) NA STRANI 111.

$$y' \sin x = y \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y \quad / \cdot \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{1}{y \ln y}$$

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x} \quad / \int$$

\Rightarrow SPECIJALNI SLUČAJEVI

$$\underline{y=0} \quad \ln y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\underline{y=1}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \quad \begin{array}{l} \text{IMPLICITNA} \\ \text{JEDNAŽBA} \\ / e^x \end{array}$$

$$e^{\ln |\ln y|} = e^{\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C}$$

$$|\ln y| = \left| \tan \frac{x}{2} \right| \cdot e^C = D$$

$$\ln y = D \tan \left(\frac{x}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad y = e^{D \tan \left(\frac{x}{2} \right)} \quad \begin{array}{l} \text{EKSPLICITNA} \\ \text{JEDNAŽBA} \end{array}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln y \\ dt = \frac{1}{y} dy \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |\ln y| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{VIDI STRANA 58.} \\ t = \tan \frac{x}{2}, x = 2 \arctan t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

ZADATAK 4. b) NA STRANI 112.

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



VIDI RJEŠENJE
ZADATKA 3. c)
NA STRANI 117.

$$\ln y = D \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

UVRSTIMO $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$

$$\underbrace{\ln 1}_{=0} = D \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1}$$

$$\boxed{0 = D} \Rightarrow \ln y = 0$$
$$\Rightarrow y = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 1}$$