112

Koristimo početni uvjet da odredimo konstantu C:

$$\frac{1}{2} = \frac{y^2(0)}{2} = \ln(1+e^0) + C = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2$$

i traženo partikularno rješenje je:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Zadatak 4 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete:

RIJEŠITI

a) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$,

b) $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, ⇒ RIJEŠENO NA STR. 118.

c) $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 2$.

Prijeđimo sada na novu grupu jednadžbi kao primjer jednadžbi koje se jednostavnom supstitucijom svode na jednandžbe sa separiranim varijablama: **homogene diferencijalne jednadžbe**. To su one jednadžbe koje možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Supstitucija je $y = u \cdot x$ gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija i onda imamo $y' = u' \cdot x + u$.

Primjer 6 Nađite opće rješenje jednadžbe $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje: Očito je riječ o homogenoj jednadžbi (2) gdje je $f(t) = t - 1$. Uvodimo supstituciju $y = ux$ i dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x}$$

odnosno

$$\int du = -\int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow u = -\ln x + \ln C.$$

Sada je $y = u \cdot x = (-\ln x + \ln C)x = x \ln \frac{C}{x}$.

Primjer 7 Za jednadžbu $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ nađite porodicu integralnih krivulja i izdvojite one krivulje koje prolaze kroz točku $(4, 0)$ odnosno $(1, 1)$.

Rješenje: Imamo:

$$(x^2 + y^2)dx = 2xydy \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

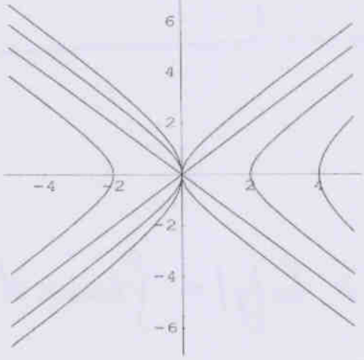
To je homogena jednadžba (2) za $f(t) = \frac{1}{2}(t^{-1} + t)$. Supstitucija $y = u \cdot x$ nam daje:

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - u^2}{u}.$$

Stoga imamo:

$$\int \frac{u}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(1-u^2) = \frac{1}{2}\ln x - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln(1-u^2) = -\ln(x) + \ln C$$

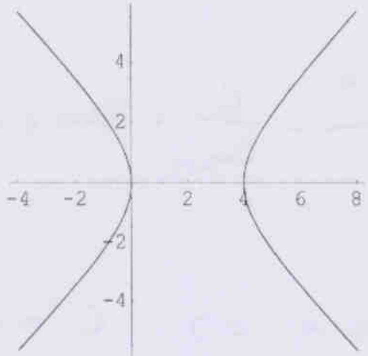
pa je $1 - \frac{C}{x} = u^2$ što daje: $\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 - Cx$. Jer je C proizvoljna konstanta, možemo to zapisati i ovako: $y^2 = x^2 - 2Cx \quad \Rightarrow \quad (x-C)^2 - y^2 = C^2$. Integralne krivulje su očito hiperbole:



Nađimo sada integralnu krivulju koja prolazi točkom $(4, 0)$. To je ustvari graf rješenjak koje zadovoljava početni uvjet $y(4) = 0$. Kad to uvrstimo u opće rješenje dobivamo:

$$(4-C)^2 - y^2(4) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (4-C)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad 16 - 8C = 0$$

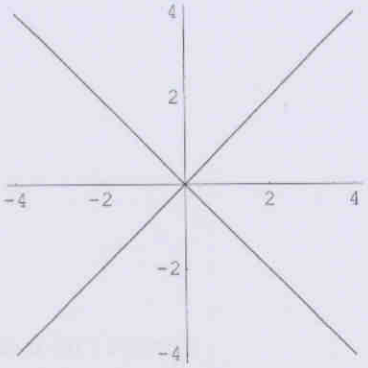
što znači da je $C = 2$, odnosno riječ je o hiperboli $(x-2)^2 - y^2 = 4$:



Drugi početni uvjet nam daje $y(1) = 1$ pa za konstantu C dobivamo:

$$(1-C)^2 - y^2(1) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (1-C)^2 - 1 = C^2$$

iz čega slijedi $C = 0$. Ovaj put dobivamo $x^2 - y^2 = 0$ degeneriranu hiperbolu, što su ustvari pravci $y = \pm x$:



Zadatak 5 Integrirajte diferencijalne jednadžbe:

RIJEŠITI!

a) $y' = -\frac{x+y}{x}$,

b) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$, ⇒ RIJEŠENO NA STR 119.

c) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$, ⇒ -//- STR 120,

d) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$. ⇒ -//- STR 121.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

nazivamo linearnom (jer sadrži samo y i y' a ne i neke druge članove kao npr y^2 ili $\sin y$). Da bi njih riješili koristit ćemo novu metodu koju nazivamo **metoda varijacije konstanti**. Ona se bazira na sljedećem:

1) riješimo prvo pripadnu homogenu jednadžbu odnosno

$$y' + P(x)y = 0.$$

Kao što vidimo, to je slučaj varijable sa separiranim varijablama pa dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int P(x)dx + \ln C.$$

Stoga je rješenje homognene jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dy}. \tag{4}$$

2) Rješenju homogene jednadžbe moramo nekako dati slobodu mijenjanja da ga možemo prilagoditi nehomogenoj jednadžbi. Pošto je jedino C u (4) proizvoljan, od njega napravimo funkciju $C(x)$ pa ćemo rješenje nehomogene tražiti u obliku $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Želimo da ono zadovoljava (3) pa nam treba i njegova derivacija:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

ZADATAK 5 b)

$$(x-y)y\,dx - x^2 dy = 0$$

$$-x^2 dy = -(x-y)y\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}$$

$$y' = \frac{x-y}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{x}{x} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{za } f(t) = (1-t)\cdot t$$

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = (1-u) \cdot u$$

$$u' \cdot x = \cancel{u} - u^2 - \cancel{u}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow -\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{u} = \ln x + C$$

$$u = \frac{1}{\ln x + C}$$

$$y = u \cdot x = \frac{1}{\ln x + C} \cdot x$$

$$y(x) = \frac{x}{\ln x + C}$$

ZADATAK 5 c)

$$y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$$

$$(2\sqrt{xy} - x)\,dy = -y\,dx \quad / \cdot \frac{1}{dx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy} - x}$$

$$y' = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x} = \frac{-1}{\frac{2\sqrt{xy} - x}{y}} = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}}$$

OVO JE HOMOGENA ODJ.

KORISTIMO $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = \frac{-ux}{2\sqrt{x^2 u} - x} = \frac{-ux}{2x\sqrt{u} - x} = \frac{-ux}{x(2\sqrt{u} - 1)}$$

$$u' \cdot x + u = \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1}$$

$$u' \cdot x = \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1} - u = \frac{-u - 2u\sqrt{u} + u}{2\sqrt{u} - 1} = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1}$$

$$\int \frac{(2\sqrt{u} - 1)\,du}{-2u\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$=$$

$$\int \frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}}\,du + \int \frac{-1\,du}{-2u\sqrt{u}} = -\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\,du = -\ln|u| + \frac{1}{2}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\ln|u| - \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|u| - \frac{1}{\sqrt{u}} = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$$

ZADATAK 3. d)

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

$$x\,dy = \left(\sqrt{x^2+y^2} + y\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + y}{x} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

OVO JE HOMOGENA ODJ 1. REDA

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = u \cdot x$$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$xu' + u = \sqrt{1+u^2} + u$$

$$xu' = \sqrt{1+u^2}$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = Cx$$

$$\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$$

ZADATAK 6. 2) $y' - y\tan x = \cos x$

$$\underbrace{y'}_{} - \underbrace{y \tan x}_{P(x)} = \underbrace{\cos x}_{Q(x)}$$

OVO JE LINEARNA ODJ

① RJEŠAVAMO

$$y' - y\tan x = 0$$

$$y' = y\tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \tan x\, dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C = \ln|\cos x|^{-1} + C$$

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x} \qquad (*)$$

② KORISTIMO $y = C(x) \cdot \frac{1}{\cos x}$ UVRSTAVAMO U POLAZNU ODJ.

$$y' = \frac{C'(x)\cdot\cos x - C(x)\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y' \qquad - \qquad y \tan x = \cos x$$

$$\frac{C'(x)\cdot\cos x - C(x)\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \underbrace{\frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}}_{=0} = \cos x \Rightarrow C'(x) = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x\, dx$$

$C(x) = \int \cos^2 x\, dx = \left\{ \begin{matrix} \text{VIDI STR. 23} \\ \text{ILI STR. 59} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$ UVRSTIMO U $(*)$

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x + \sin x \cos x + C}{\cos x}$$