TITRANJE MATEMATIČKOG NJIHALA U POLJU SILE TEŽE

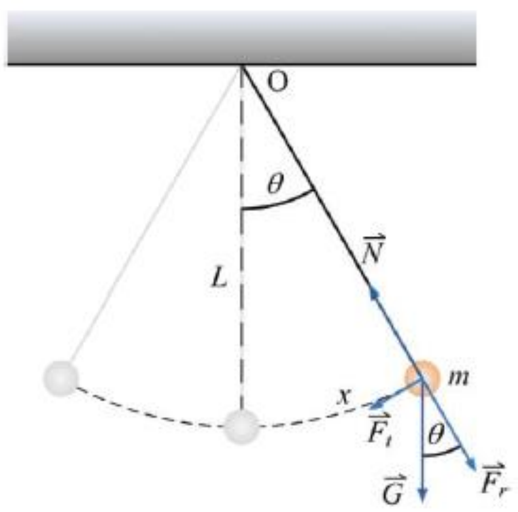
Cilj vježbe:

Odrediti ubrzanje ubrzanje Zemljine sile teže.

Teorijski dio

Jedan od najjednostavnijih modela idealnog harmoničkog oscilatora naziva se jednostavno ili matematičko njihalo, koje se sastoji od tijela (kuglice) mase m ovješenog o nerastezljivu nit duljine L pri čemu je masa niti zanemariva u odnosu na masu kuglice obješene o nit (slika 1).

Kada njihalo miruje, ono se postavi u ravnotežni položaj tako da se centar mase nalazi ispod točke ovjesišta O na pravcu koji se poklapa s pravcem sile teže $\vec{G}$. U ravnotežnom položaju sila $\vec{N}$ napetosti niti uravnotežuje silu težu $\vec{G}$. Na sl. prikazane su sile koje djeluju na njihalo kada je kuglica mase m otklonjena za kut θ iz ravnotežnog položaja.



Slika 1. Matematičko njihalo

Na kuglicu u otklonjenom položaju djeluje tangencijalna$\vec{F}_t$ i radijalna $\vec{F}_r$ komponenta sile teže, gdje je tangencijalna komponenta $\vec{F}_t$ tangencijalna na putanju kuglice, a da je radijalna komponenta $\vec{F}_r$ okomita na putanju kuglice i ona je uvijek položena duž pravca niti.

Kada je kuglica otklonjena za kut θ iz ravnotežnog položaja, radijalna komponenta sile teže uravnotežena je sa silom $\vec{N}$ napetosti niti,

$$N = F_r = mg \cdot \cos\theta, \qquad (1)$$

a tangencijalna komponenta $\vec{F}_t$ sile teže usmjerena je prema ravnotežnom položaju. Rezultanta sila na tijelo mase m jednaka je tangencijalnoj komponenti sile teže:

$$F_t = -mg \cdot sin\theta \ , \qquad (2)$$

Negativan predznak pokazuje da je sila suprotnog smjera od smjera povećanja kuta otklona θ iz ravnotežnog položaja.

Kada se kuglica pomakne iz položaja ravnoteže za kut θ i pusti, uslijed djelovanja povratne tangencijalne sile$\overrightarrow{F_t}$, kuglica će titrati amo-tamo oko ravnotežnog položaja. Sila $\vec{F}_t$ nije harmonijska budući da je proporcionalna sinθ, a ne kutnom pomaku θ i gibanje njihala nije harmonijsko. Međutim, za male kutove otklona vrijedi da je $\sin\theta \approx \theta$.
Za vrlo male kutove otklona iz položaja ravnoteže tangencijalna povratna sila

$$F_t = -mg \cdot \theta \ , \qquad (3)$$

je harmonijska i njihalo približno titra kao neprigušeni harmonički oscilator. Prema tome, matematičko (jednostavno) njihalo harmonički titra samo za male kutove otklone iz ravnotežnog položaja, tj. za male amplitude dok za veće amplitude njegovo gibanje (njihanje) nije harmonijsko.

Jednadžba gibanja matematičkog njihala dobiva se primjenom II. Newtonovog zakona

$$ma_t = F_t = -mg \cdot \theta, \qquad (4)$$

gdje je a_t tangencijalno ubrzanje kuglice mase m obješene o nit duljine L u aproksimaciji malih kutnih pomaka.
Uzimajući u obzir vezu između tangencijalnog i kutnog ubrzanja

$$a_t = L \cdot \alpha = L \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \qquad (5)$$

jednadžba matematičkog njihala (4) ima oblik

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ . \qquad (6)$$

Prema tome, jednadžba (6) ima isti matematički oblik kao i jednadžba titranja opruge. Stoga jednadžba (6) predstavlja jednadžbu harmoničkog titranja čije je rješenje oblika

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \ , \qquad (7)$$

gdje je θ_0 amplituda titranja, φ_0 početna faza, $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ kružna frekvencija titranja, dok je period titranja matematičkog njihala,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \ . \qquad (8)$$

Prema relaciji (8), u slučaju malih amplituda titranja, period titranja matematičkog njihala ne ovisi ni o masi ni o amplitudi, već samo o duljini njihala L i ubrzanju sile teže g.

Eksperimentalni dio

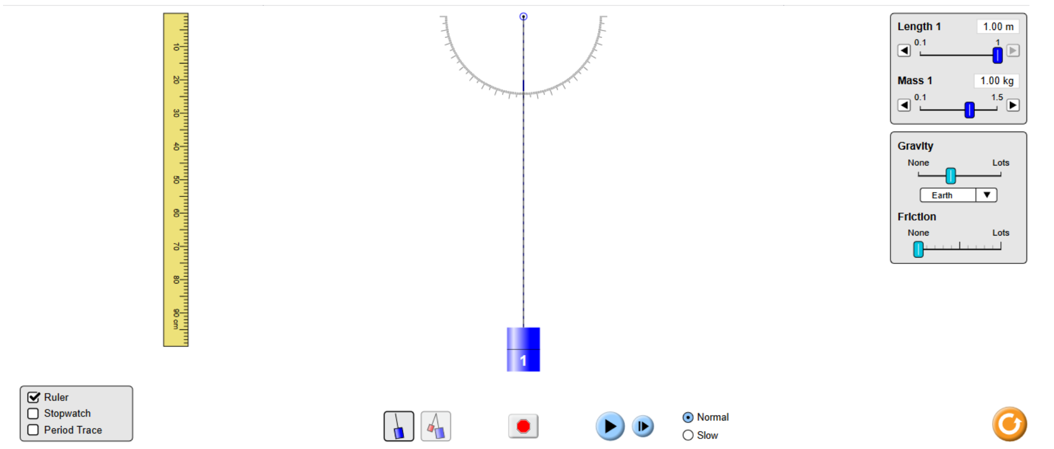
Period titranja matematičkog njihala ne ovisi o amplitudi titranja i masi ovješenog tijela, već samo o duljini niti L i ubrzanju Zemljine sile teže. Prema relaciji (8) ovisnost $T = f(L)$ perioda titranja T o duljini L matematičkog njihala je nelinearna. Preuređivanjem relacije (8) dobiva se linearna ovisnost $T^2 = f(L)$ oblika

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot L \qquad (9)$$

Linearna ovisnost $T^2 = f(L)$, prikazana relacijom (9), predstavlja jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku, pri čemu je koeficijent smjera tog pravca $a = 4\pi^2/g$, a odsječak na osi ordinate $b = 0$. Prema tome, određivanjem a – koeficijenta smjera pravca, koji prikazuje linearnu ovisnost, moguće je odrediti g ubrzanje Zemljine sile teže.
Koristeći simulaciju matematičkog njihala na linku:

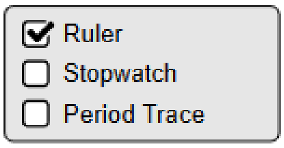
https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_en.html

mi ćemo simulirati vježbu određivanje ubrzanja Zemljine sile teže. Kada otvorite taj link u vašem pregledniku otvori vam se prozor kao što je na slici 2.



Slika 2. Izgled preglednika simulacije matematičkog njihala

U sredini vam se nalazi uteg mase *m* obješen o nit duljine *L*. Masu i duljinu niti možete podesiti u gornjem desnom okviru, a u okviru gdje piše „Gravity“ nije niša potrebno podešavati samo je potrebno provjeriti da li se odnosi na Zemlju („Earth“). U donjem lijevom kutu (slika 3) je pomoćni dio pomoću kojeg možemo provjeriti duljinu niti (Ruler), zaporna ura („Stopwatch“) pomoću koje možemo mjeriti vrijeme) i putanja jednog perioda (Period Trace).



Slika 3. Mjerni instrumenti

Na dnu vam se nalazi izbornik kao na slici 4. i on nam služi za odabir vrste titranja, pokretanje i zaustavljanje titranja.

Slika 4. Izbornik za podešavanje titranja.

Uteg se iz ravnotežnog položaja otklanja tako da ga uhvatimo pokazivačem miša i otklonimo lijevo ili desno i pustimo, a pomoću oznake za pokretanje pokrenemo da titra (ukoliko je već pokrenuto onda će uteg odah krenuti titrati). Gore kod ovjesišta se nalazi kutomjer koji nam govori za koliki smo kut otklonili nit matematičkog njihala.

Postupak mjerenja:

1. **Korak: Postaviti željenu masu utega na 0.2 kg.**
2. **Korak: Postaviti željenu duljinu niti za početak 1 m, a dalje će se mijenjati kako je naznačeno u tabeli 1.**
3. **Korak: Otkloniti uteg od ravnotežnog položaja za 5° i izmjeriti vrijeme jednog perioda (Vrijeme jednog perioda je vrijeme koje protekne dok uteg ode iz jednog amplitudnog položaja u drugi i vrati se nazad u početni amplitudni položaj).**
4. **Korak: Opisani postupak ponoviti onoliko puta koliko je naznačeno u tabeli 1.**

Ime i prezime:

Rad u laboratoriju

Zadatak 1.

Prateći korake u postupku za mjerenje potrebno je za svaku duljinu njihala L izmjerite period titranja T. Izvedite 10 različitih mjerenja. Pri svakom mjerenju skratite duljinu njihala za 5 cm, a neka početna duljina bude 1 m. Period titranja možete mjeriti pomoću svojeg mjernog instrumenta (mobitel ili zaporna ura) ili zaporne ure koja se nalazi u simulaciji „Stopwatch“.

Tabela 1.

Br.mj.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L/m	1	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.60	0.55
T/s										
g $/ms^{-2}$										

Zadatak 2.

Pomoću izraza za period matematičkog njihala – relacija (9), izračunajte ubrzanje sile teže. Pokažite jedan račun.

Izračun:

Analiza i rasprava rezultata mjerenja

Zadatak 3.

a) Izračunajte maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pri eksperimentalnom određivanju ubrzanja Zemljine sile teže. Podatke za duljinu niti matematičkog njihala i njegov period titranja preuzmite iz tabele 1. Pogreške pri određivanju duljine niti njihala i perioda titranja određene su upotrijebljenim mjernim instrumentima.

Izračun:

- maksimalna apsolutna pogreška

- maksimalna relativna pogreška

Tabela 2. Rezultati statističke analize

Rezultat mjerenja izražen **MAKSIMALNOM APSOLUTNOM pogreškom**	Rezultat mjerenja izražen **MAKSIMALNOM RELATIVNOM pogreškom**

b) Obrazložite dobivenu pogrešku! Navedite nekoliko čimbenika koji su, po Vašem mišljenju, utjecali na odstupanja u mjerenjima?

<u>Zadatak 4.</u>

a) U MS Excellu prikažete ovisnost perioda titranja T matematičkog njihala o duljini L njihala ,$T = f\,(L)$.

b) Kroz danu raspodjelu mjernih podataka, u gr.1., ucrtajte krivulju koja najbolje odgovara ovisnosti $T = f\,(L)$.

c) Kako se naziva krivulja koja prikazuje ovu grafičku ovisnost? Napišite formulu za matematičku funkciju koja opisuje ovisnost između mjerenih fizikalnih veličina.

d) Obrazložite kako period titranja T matematičkog njihala ovisi o duljini njihala L.

Gr. 1. Ovisnost perioda titranja T o duljini niti matematičkog njihala L, T = f (L) .

<u>Zadatak 5.</u>

a) Preuredite podatke prikazane na gr. 1. tako da dobijete linearno ovisne podatke: $T^2 = f\,(L)$. Popunite tabelu 3.

Tabela 3.

T^2 / s^2										
L / m	1	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.60	0.55

b) U MS Excellu prikažete ovisnost $T^2 = f(L)$ tako da ucrtate mjerne podatke iz tabele 3. u gr. 2.

Gr. 2. Ovisnost kvadrata perioda titranja T^2 o duljini niti matematičkog njihala L, $T^2 = f(L)$.

Zadatak 6.

Metodom najmanjih kvadrata izračunajte parametre regresijskog pravca: koeficijent smjera pravca – a, odsječak na osi ordinata – b, i koeficijent korelacije - R. Popunite tabelu 4.

Tabela 4.

n	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$		
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							
8.							
9.							
10.							
n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i \cdot y_i$	$\sum (x_i)^2$	$\sum (y_i)^2$	$(\sum x_i)^2$	$(\sum y_i)^2$

$x_i \equiv$ ______

$y_i \equiv$ ______

Izračun:

a = __________ ***b*** = __________ ***R*** = ___________

a) Napišite dobivenu jednadžbu regresijskog pravca u eksplicitnom obliku. Dobiveni pravac ucrtajte u gr. 2.

y* = *ax* + *b = ________________

b) Pomoću dobivene jednadžbe regresijskog pravca i relacije (9) izračunajte g ubrzanje Zemljine sile teže.
Izračun:

g _____________

Zadatak 7.
Objasnite linearnu korelaciju između danih mjernih podataka s obzirom na dobivenu vrijednost koeficijenta korelacije *R*.

Zadatak 8.
Neka je prava (teorijska) vrijednost ubrzanja Zemljine sile teže g =9.81 m/s^2. Procijenite točnost mjerenja tako da izračunate relativnu pogrešku pri određivanju ubrzanja Zemljine sile teže g.

Zadatak 9.
Navedite koje pogreške najviše utječu na rezultate mjerenja u ovom eksperimentu?