

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE II

Predavanja

Autor: mr. sc. Milica Pužar

Literatura:

Pinter, V.: Osnove elektrotehnike, Knjiga druga, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

Felja, Koračin: Zbirka zadataka i riješenih primjera iz osnova elektrotehnike, 1 i 2 dio, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

Dopunska literatura:

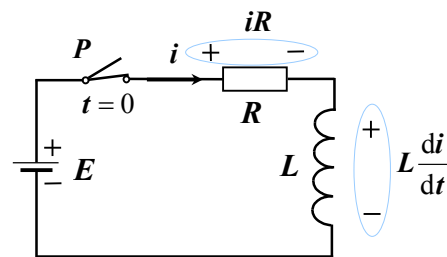
Kuzmanović, B., Osnove elektrotehnike I i II, Element, Zagreb, 2001.

Pužar, M., Osnove elektrotehnike II, predavanja, Elektrotehnički fakultet Osijek, 2005.

Vremenski promjenljive struje i naponi

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

Ukapčanje induktivnog svitka na naponski izvor



Prema II Kirchhoffovom zakonu: $E = iR + L \frac{di}{dt}$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

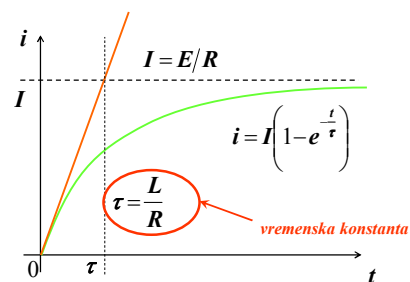
Priključak svitka

- Kod priključka svitka na istosmjerni napon dobivamo promjenljivu struju.
- Zbog induktiviteta struja ne može trenutno poprimiti vrijednost određenu otporom R .
- Vremenska ovisnost struje (Osnove elektrotehnike I):

$$i = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

Priključak svitka



Ovisnost struje o vremenu pri ukapčanju električnog kruga s otporom i induktivitetom

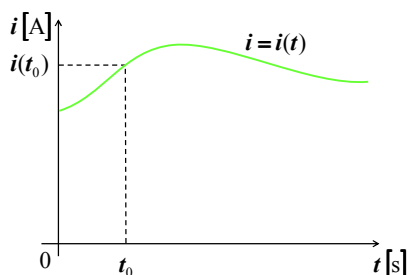
VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

- Općenito: struje i naponi mogu se mijenjati na različite načine.
- Govorimo o vremenski promjenljivim veličinama.
- Promjenljiva struja je ona struja čija se jakost mijenja s vremenom.
- Promjenljiv napon je onaj napon čiji se iznos mijenja s vremenom.

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

- Analitički izrazi za promjenljive veličine:
 - promjenljiva struja i : $i = f(t)$
 - promjenljiva elektromotorna sila e : $e = f(t)$
 - promjenljiv napon u : $u = f(t)$
- Sve promjenljive veličine možemo prikazati i grafički.

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI



Grafički prikaz promjenljive struje

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

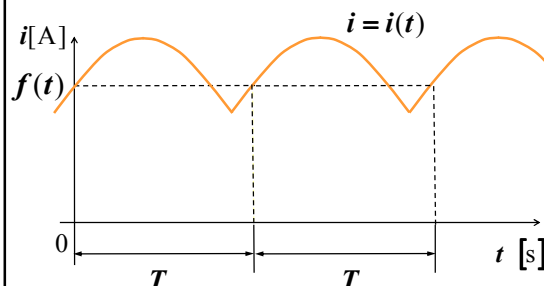
- Promjenljive struje i naponi uzrokuju u električnim krugovima promjenljiva električna i magnetska polja.
- Promjenljiva struja ili napon može u svakom trenutku imati drukčiju vrijednost - može i mijenjati smjer.
- Struje i naponi su općenito neperiodičke funkcije vremena.
- Tehnički najvažniji su struje i naponi koji su periodičke funkcije vremena.

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

Periodički promjenljive struje i naponi

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

Periodički promjenljive struje i naponi



Periodički promjenljiva istosmjerna struja

Matematički izraz:

$$f(t) = f(t+T) = f(t+kT), \quad k = 0,1,2,\dots$$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

- Kod periodički promjenljive struje (napona) se nakon određenog vremena oblik ponavlja.
- Perioda T [s] - vremenski interval, nakon kojeg se oblik periodičke veličine počne ponavljati.
- Frekvencija f [Hz] - broj perioda u jedinici vremena: $f = \frac{1}{T}$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

Periodički promjenljiva izmjenična struja

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

➤ Srednja vrijednost (matematička) funkcije

Srednja vrijednost funkcije

$$y_{sr} x = \int_0^x y(x) dx$$

srednja vrijednost funkcije

$$y_{sr} = \frac{1}{x} \int_0^x y(x) dx$$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

Srednja vrijednost struje

$$I_{sr} T = \int_0^T i(t) dt$$

srednja vrijednost struje

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

srednja vrijednost napona $U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

Srednja vrijednost struje sinusoidalnog oblika

srednja vrijednost sinusoidalne struje $I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0$

$$i = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

➤ Srednja elektrolitska vrijednost struje i napona

Periodički promjenljiva struja

srednja elektrolitska vrijednost struje

$$I_a = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

srednja elektrolitska vrijednost napona $U_a = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

➤ **Efektivna vrijednost struje i napona**

$I^2 T = \int_0^T [i(t)]^2 dt$

$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}$

Periodička promjena kvadratne funkcije struje

efektivna vrijednost napona $U = U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

■ Ako se struja mijenja s konstantnom frekvencijom, u svakom će periodu T izvršeni rad A biti jednak:

$$A = \int_0^T Ri^2 dt \Rightarrow \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T$$

efektivna vrijednost struje

■ Efektivna vrijednost periodički promjenljive struje je ona vrijednost istosmjerne struje I konstantnog iznosa koja bi u istom periodu T izvršila jednaku količinu rada.

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI
Periodički promjenljive struje i naponi

■ Efektivna vrijednost periodički promjenljive struje :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

■ Ovaj izraz vrijedi za bilo kakvu periodički promjenljivu veličinu.

■ Efektivna vrijednost izmjenične struje sinusoidalnog oblika:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

■ Periodična funkcija $f(x)$ s periodom T može se točno ili približno zamijeniti trigonometrijskom sumom:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega x + \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega x$$

■ Aproksimacija je najbolja ako za koeficijente a_k i b_k uzmemo Fourierove koeficijente zadane funkcije:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x dx \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

■ Konvergentni Fourierov red zadane funkcije $f(x)$ dobijemo ako vrijedi:

$$s_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} s(x)$$

■ Fourierov red zadane funkcije $f(x)$ možemo napisati i u obliku:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x + \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{tg } \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

➤ **Parna nesinusna funkcija**

Matematički izraz: $f(-x) = f(x)$

Parna nesinusna funkcija

Fourierovi koeficijenti

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k \frac{2\pi}{T} x dx \quad b_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

nema sinusnih članova

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

➤ **Neparna nesinusna funkcija**

Matematički izraz:
 $f(-x) = -f(x)$

Neparna nesinusna funkcija

Fourierovi koeficijenti

$a_k = 0$ $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin k \frac{2\pi}{T} x dx$ $k = 0, 1, 2, \dots$

nema kosinusnih članova

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

➤ **Efektivna vrijednost periodički promjenljive struje**

Fourierov red struje

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots + I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

Efektivna vrijednost struje

$$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$i^2 = I_0^2 + 2I_0 I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{1m}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \dots$$

$$+ 2[I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)] I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

$$+ I_{nm}^2 \sin^2(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

Efektivna vrijednost periodički promjenljive struje

Efektivna vrijednost struje

$$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$I_0^2 + 2I_0 I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{1m}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \dots$$

$$+ 2[I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)] I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

$$+ I_{nm}^2 \sin^2(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

Pod korijenom dobijemo sumu integrala od kojih su neki jednaki nuli:

$$\int_0^T 2I_0 I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) dt = 0$$

$$\int_0^T 2I_{km} I_{nm} \sin(k\omega t + \varphi_k) \sin(n\omega t + \varphi_n) dt = 0$$

za $k \neq n$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

Efektivna vrijednost struje

Pod korijenom preostanu samo članovi oblika:

$$\int_0^T I_{nm}^2 \sin^2(n\omega t + \varphi_n) dt =$$

$$= I_{nm}^2 \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(n\omega t + \varphi_n)] dt = \frac{1}{2} I_{nm}^2 T = I_n^2 T$$

Maksimalna vrijednost n-tog člana - harmonika struje

$$I_{nm} = \sqrt{2} I_n \Rightarrow I_n^2 = \frac{1}{2} I_{nm}^2$$

efektivna vrijednost n-tog harmonika struje

Izraz pod korijenom glasi:

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_n^2 + \dots$$

Efektivna vrijednost periodične nesinusne struje

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_n^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

➤ **Snaga**

Fourierov red napona

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Fourierov red struje

$$i = I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} I_{lm} \sin(l\omega t + \varphi_{il}) = I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} i_l$$

Trenutna vrijednost snage

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \cdot \left(I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} i_l \right)$$

Srednja snaga

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \cdot \left(I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} i_l \right) dt$$

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE

Snaga

Srednja snaga

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \cdot \left(I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} i_l \right) dt$$

Sljedeći integrali su jednaki nuli: za $k \neq l$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{lm} \sin(l\omega t + \varphi_{il}) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}) \sin(l\omega t + \varphi_{il}) dt = 0$$

Nakon integriranja ostanu samo članovi za $k = l = n$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{nm} I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_{un}) \sin(n\omega t + \varphi_{in}) dt =$$

efektivna vrijednost n-tog harmonika struje

$$= \frac{1}{2} U_{nm} I_{nm} \cos(\varphi_{un} - \varphi_{in}) = U_n I_n \cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

efektivna vrijednost n-tog harmonika napona

PERIODIČNE NESINUSNE VELIČINE Snaga

Srednja snaga

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

snaga n-tog harmonika napona i struje

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

snaga istosmjernog napona i struje

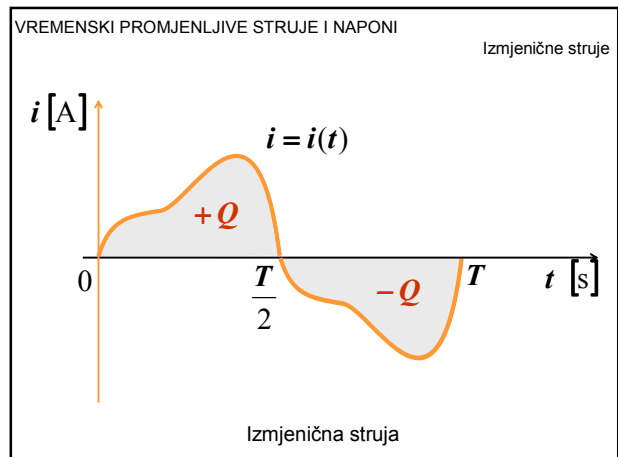
Snaga kod nesinusne struje i napona jednaka je zbroju snaga što je daju struje i naponi iste frekvencije i snage istosmjerne struje

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI

Izmjenične struje

VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI Izmjenične struje

- Izmjenična struja - periodički promjenljiva struja koja mijenja iznos i smjer strujanja.
- Naročito su zanimljive one struje čije su pozitivne i negativne površine u vremenskom dijagramu jednake.
- Posljedica - rezultatna količina protjecanog naboja Q za vrijeme jedne periode T jednaka je nuli.



VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE I NAPONI Izmjenične struje

trenutna struja

$$i = \frac{dq}{dt}$$

naboj u vremenu od t_1 do t_2

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

naboj u polovici poluperiode struje

$$Q = \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt$$

Elementi mreža

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

➤ Svojstva elemenata mreže

➤ Otpor okrugle žice

duljina vodiča l

vodič

presjek vodiča S

električna vodljivost

električni otpor

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

specifični električni otpor

specifična električna vodljivost

$$G = \frac{1}{R} = \kappa \frac{S}{l}$$

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

➤ Kapacitet pločastog kondenzatora

razmak između ploča d

kondenzator

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

kapacitet

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

dielektrična konstanta

površina ploče S

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

➤ Induktivitet prigušnice okruglog presjeka

duljina svitka l

prigušnica

promjer svitka $2a$

površina presjeka S

broj zavoja N

induktivitet

$$L \cong N^2 \mu \frac{S}{l} = N^2 \mu \frac{a^2 \pi}{l} = \frac{N^2}{R_m}$$

permeabilnost

magnetski otpor

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

➤ Realni elementi

■ Otpornici, kondenzatori i prigušnice mogu se za izmjeničnu struju nadomjestiti shemom:

otpor R

induktivitet L

kapacitet C

ELEMENTI MREŽA

Otpornik, kondenzator i prigušnica

■ Svojstva dobrog otpornika:

$$\left. \begin{array}{l} R \gg \omega L \\ R \ll \frac{1}{\omega C} \end{array} \right\}$$

kružna frekvencija

idealni otpor

■ Uvjet je ispunjen kod istosmjerne struje i za niske frekvencije kod izmjenične struje.

ELEMENTI MREŽA Otpornik, kondenzator i prigušnica
Realni elementi

■ Svojstva dobre prigušnice:

$$\left. \begin{aligned} \omega L &\gg R \\ \omega L &\ll \frac{1}{\omega C} \end{aligned} \right\}$$

idealni induktivitet
radni otpor zavojnice
realna prigušnica

■ Kod prigušnice obično otpor nije zanemariv.

ELEMENTI MREŽA Otpornik, kondenzator i prigušnica
Realni elementi

■ Svojstva dobrog kondenzatora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega C} &\ll \omega L \\ \frac{1}{\omega C} &\ll R \end{aligned} \right\}$$

idealni kapacitet
radni otpor izolacije
idealni kapacitet
realni kondenzator

■ Kod kondenzatora obično izolacija nije dobra.

ELEMENTI MREŽA Otpornik, kondenzator i prigušnica
Jednostavan strujni krug

➤ **Jednostavan strujni krug**

žičana petlja
 $I = \frac{E}{R}$
istosmjerna struja
istosmjerno napajanje
radni otpor žice

■ Kod istosmjernog napajanja stanje u krugu određuje radni otpor.

ELEMENTI MREŽA Otpornik, kondenzator i prigušnica
Jednostavan strujni krug

žičana petlja
radni otpor žice
induktivitet žice
 $f \ll \Rightarrow \omega L \neq 0$
 $\Psi = L i$
ulaneeni magnetski tok
izmjenično napajanje niske frekvencije

■ Kod izmjeničnog napajanja niske frekvencije stanje u krugu određuju radni otpor i induktivitet.

ELEMENTI MREŽA Otpornik, kondenzator i prigušnica
Jednostavan strujni krug

žičana petlja
kapacitet među vodičima
radni otpor žice

izmjenično napajanje visoke frekvencije $f \gg \Rightarrow \frac{1}{\omega C} \ll$

■ Kod napajanja visoke frekvencije stanje u krugu određuju radni otpor i kapacitet.

■ Pojave:

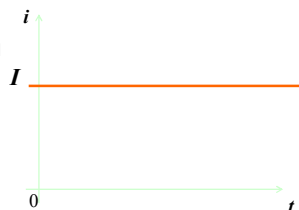
- skin efekt
- zračenje.

Prijelazne pojave

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Stacionarno stanje**

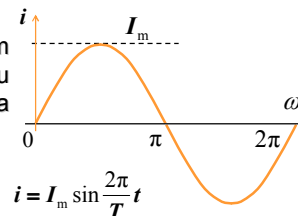
- Stacionarno stanje u mreži - određuju izvori napajanja vremenski konstantnog iznosa i oblika napona (struje).
- Struje i naponi u svim dijelovima mreže su stalni u vremenu.



Ovisnost struje o vremenu u stacionarnom stanju pri napajanju iz izvora konstantnog napona

PRIJELAZNE POJAVE

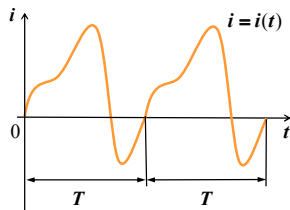
- Stacionarno stanje u mreži - određuju i izvori napajanja sinusnog oblika napona (struje) uvijek iste frekvencije.
- Struje i naponi u svim dijelovima mreže su sinusne funkcije vremena iste frekvencije.



Ovisnost sinusne struje o vremenu u stacionarnom stanju

PRIJELAZNE POJAVE

- Stacionarno stanje u mreži - određuju i izvori napajanja periodički promjenjivog napona (struje) uvijek s istom periodom.
- Struje i naponi u svim dijelovima mreže su periodičke funkcije vremena s istom periodom.

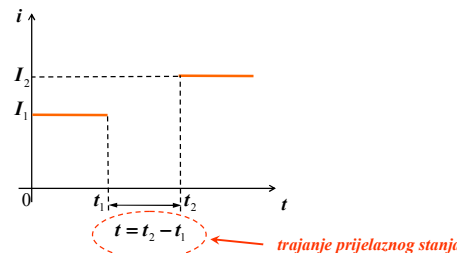


Ovisnost periodički promjenjive struje o vremenu

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Prijelazno stanje**

- Prijelazno stanje u mreži - proces koji nastaje pri prijelazu iz jednog stacionarnog stanja u drugo.



Ovisnost struje o vremenu između 2 stacionarna stanja

PRIJELAZNE POJAVE

- Stacionarno stanje - struje i naponi se odrede partikularnim rješenjima diferencijalnih jednadžbi mreže.
- Prijelazno stanje - struje i naponi se odrede potpunim rješenjima diferencijalnih jednadžbi mreže.
- Diferencijalne jednadžbe mreže možemo postaviti bilo kojom metodom za rješavanje strujnih krugova:
 - prema I i II Kirchoffovom zakonu - broj jednadžbi je jednak broju grana mreže,
 - za konturne struje - broj jednadžbi je jednak broju nezavisnih petlji mreže, itd.

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Određivanje konstanti integracije iz početnih uvjeta**

- Prijelazna struja nastaje uvijek pri uključenju ili isključenju mreže na napon ili zbog neke druge promjene u mreži.
- Komutacija - bilo koja promjena u mreži:
 - ukapčanje ili iskapčanje mreže s izvora,
 - skokovita promjena parametara mreže,
 - skokovita promjena priključenog napona:
 - amplitude,
 - frekvencije ili
 - faze.

PRIJELAZNE POJAVE

■ **Pretpostavka:**

- promjena se događa trenutno $\Delta t = 0 \text{ s}$,
- komutacija traje konačno vrijeme.

■ **Promatramo:**

- početak procesa u $t = 0 \text{ s}$ - vrijeme komutacije,
- vrijeme neposredno prije $t = -0 \text{ s}$,
- vrijeme neposredno poslije $t = +0 \text{ s}$.

■ **Energije električnih i magnetskih polja se ne mogu trenutno promijeniti - trenutna snaga je konačna veličina.**

PRIJELAZNE POJAVE

trajanje komutacije $\Delta t = 0 \text{ s}$ promjena energije za trajanja komutacije $\Delta W = W(+0) - W(-0)$

$$\Delta W = p \Delta t \rightarrow 0$$

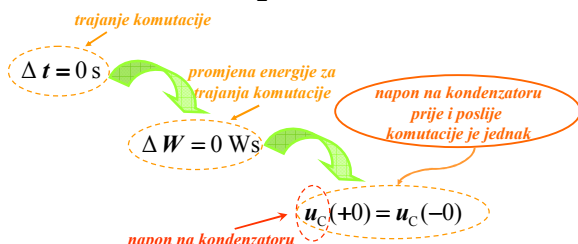
$\Delta t = 0 \text{ s}$

$$\Rightarrow W(+0) = W(-0)$$

energije prije i poslije komutacije su jednake

PRIJELAZNE POJAVE

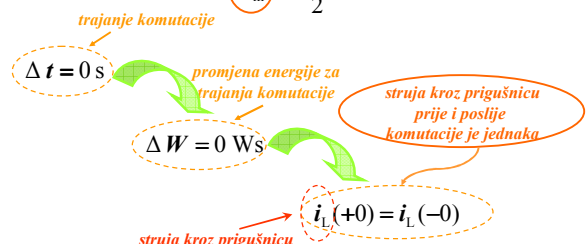
energija električnog polja kondenzatora $W_e = \frac{C u_c^2}{2}$ kapacitet C napon na kondenzatoru u_c



■ **Za vrijeme komutacije ne mijenja se napon na oblogama kondenzatora!**

PRIJELAZNE POJAVE

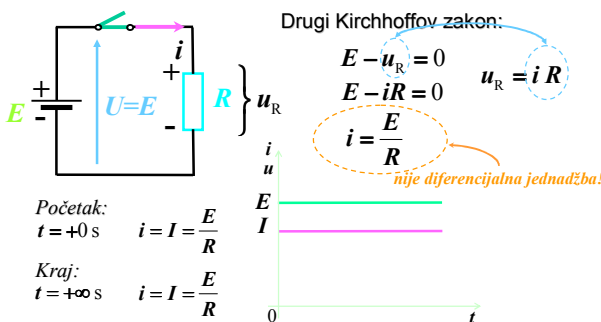
energija magnetskog polja prigušnice $W_m = \frac{L i_L^2}{2}$ induktivitet L struja kroz prigušnicu i_L



■ **Za vrijeme komutacije ne mijenja se struja kroz prigušnicu!**

PRIJELAZNE POJAVE

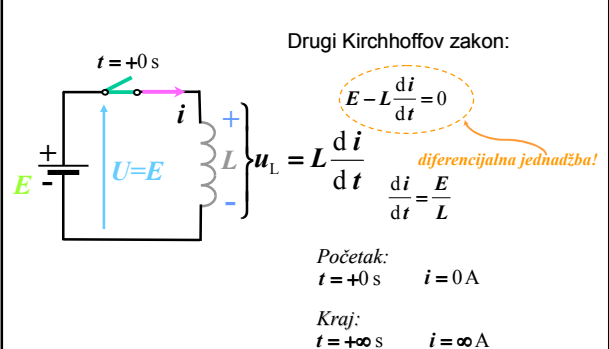
➤ **Priključak istosmjernog napona na otpor**



Nema prijelazne pojave jer nema akumulirane energije električnog i magnetskog polja!

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Priključak istosmjernog napona na induktivitet**



PRIJELAZNE POJAVE

diferencijalna jednažba!

$$E - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

$$di = \frac{E}{L} dt$$

$$i = \frac{E}{L} t + C_{int}$$

$t = +0 \text{ s}$

$i = 0 \text{ A}$

$C_{int} = 0$ *konstanta integracije*

$$i = \frac{E}{L} t$$

Struja bi teoretski rasla u beskonačnost!

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Priključak istosmjernog napona na kapacitet**

$t = +0 \text{ s}$

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$E - u_C = 0$$

napon na kondenzatoru

Početak:
 $t = +0 \text{ s}$ $i = \infty \text{ A}$

Kraj:
 $t = +\infty \text{ s}$ $i = 0 \text{ A}$

PRIJELAZNE POJAVE

Diferenciramo po t

$$q = C u_C$$

naboj na kondenzatoru

$$q = C u_C \frac{d}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$E - \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

integralna jednažba!

Struja bi teoretski imala skok u beskonačnost!

PRIJELAZNE POJAVE

■ **Pretpostavka: u vremenu komutacije Δt teče stalna struja I_0 .**

naboj na kondenzatoru

$$Q = I_0 \Delta t$$

$$Q = C E$$

kapacitet kondenzatora *napon na kondenzatoru*

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad I_0 \rightarrow \infty$$

$$I_0 \Delta t = Q$$

Površina ostaje ista bez obzira na veličinu Δt !

PRIJELAZNE POJAVE

Prijelazne pojave u mreži s otporom i induktivitetom

PRIJELAZNE POJAVE

➤ **Priključak prigušnice na istosmjerni napon**

radni otpor prigušnice

$t = +0 \text{ s}$

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$E - i R - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

induktivitet prigušnice *diferencijalna jednažba!*

Početak:
 $t = +0 \text{ s}$ $i = 0 \text{ A}$

Kraj:
 $t = +\infty \text{ s}$ $i = I = \frac{E}{R}$

PRIJELAZNE POJAVE

$iR + L \frac{di}{dt} = E$ *podijelimo s R*

$i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = \frac{E}{R} \Rightarrow i + \tau \frac{di}{dt} = i'$

Vremenska konstanta τ *Struja i' nakon prijelazne pojave* *Partikularno rješenje nehomogene diferencijalne jednačbe*

$i' = \frac{E}{R}$

Homogena diferencijalna jednačba

$i'' R + L \frac{di''}{dt} = 0$ *Opće rješenje* $i'' = A e^{-\frac{R}{L}t}$

PRIJELAZNE POJAVE

Homogena diferencijalna jednačba

$i'' R + L \frac{di''}{dt} = 0$ *pomnožimo s dt*

$R i'' dt + L di'' = 0$ *podijelimo s i''* *integriramo*

$R dt + L \frac{di''}{i''} = 0$

$\int R dt + \int L \frac{di''}{i''} = C_{int} \Rightarrow$ *Opće rješenje* $i'' = A e^{-\frac{R}{L}t}$ *konstanta integracije*

Konstantu integracije odredimo iz početnih uvjeta!

PRIJELAZNE POJAVE

Ukupna struja prijelazne pojave

$i = i' + i''$ *prijelazna struja*

trajna struja

$i = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}$

$0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$

Ukupna struja prijelazne pojave

$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$

PRIJELAZNE POJAVE

Ovisnost struje o vremenu pri ukapčanju prigušnice na istosmjerni napon

Struja poprimi konačnu vrijednost praktički nakon 5-6 τ .

PRIJELAZNE POJAVE

➤ Kratko spajanje prigušnice

Drugi Kirchhoffov zakon:

$E - iR - L \frac{di}{dt} = 0$

$u_L = L \frac{di}{dt}$ *diferencijalna jednačba!*

Elektromotorna sila u krugu $E = 0 \text{ V}$

Početak: $t = +0 \text{ s}$ $i = I$
Kraj: $t = +\infty \text{ s}$ $i = 0 \text{ A}$

PRIJELAZNE POJAVE

Diferencijalna jednačba

$E - iR - L \frac{di}{dt} = 0$ *Elektromotorna sila u krugu*

$0 - iR - L \frac{di}{dt} = 0$ *pomnožimo s dt*

$R i dt + L di = 0$ *podijelimo s i* *integriramo*

$R dt + L \frac{di}{i} = 0$

$\int R dt + \int L \frac{di}{i} = C_{int} \Rightarrow$ *Opće rješenje* $i = A e^{-\frac{R}{L}t}$ *konstanta integracije*

Konstantu integracije odredimo iz početnih uvjeta!

PRIJELAZNE POJAVE

Ukupna struja prijelazne pojave

$$i = i + i''$$

prijelazna struja

$$i = 0 + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$t = 0$

$$i = I$$

$$I = A \Rightarrow A = I$$

Ukupna struja prijelazne pojave

$$i = I e^{-\frac{R}{L}t}$$

PRIJELAZNE POJAVE

Ovisnost struje o vremenu pri iskapčanju prigušnice s istosmjernog napona

Struja nestane praktički nakon 5-6 τ .

PRIJELAZNE POJAVE

Struja prijelazne pojave

$$i = I e^{-\frac{R}{L}t}$$

Energija utrošena u otporu

$$W_g = \int_0^{\infty} i^2 R dt$$

$$= I^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$= \frac{1}{2} L I^2$$

Sva energija magnetskog polja prigušnice se pretvori u toplinu u otporu!

PRIJELAZNE POJAVE

➤ Iskapčanje prigušnice i voltmetra

Stacionarna struja kroz prigušnicu

$$i = I = \frac{E}{R}$$

Elektromotorna sila u krugu

$$E = 0 \text{ V}$$

$u_L = L \frac{di}{dt}$

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$0 - i(R + R_V) - L \frac{di}{dt} = 0$$

diferencijalna jednačba!

Početak:
 $t = +0 \text{ s}$ $i = I = \frac{E}{R}$
 Kraj:
 $t = +\infty \text{ s}$ $i = 0 \text{ A}$

PRIJELAZNE POJAVE

$$i(R + R_V) + L \frac{di}{dt} = 0$$

diferencijalna jednačba!

Rješenje

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I = \frac{E}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V}$$

Napon na voltmetru

$$U_V = R_V i(+0) = \frac{E}{R} R_V$$

Ako je $R \ll R_V$, napon na voltmetru je jako velik, i može doći do proboja izolacije voltmetra!

PRIJELAZNE POJAVE

➤ Trenutna promjena parametara mreže

Stacionarna struja u 1. krugu

$$i = I_1 = \frac{E}{R}$$

$u_L = L \frac{di}{dt}$

$t = +0 \text{ s}$

Stacionarna struja u 2. krugu

$$i = I_2 = \frac{E}{R + R_0}$$

$u_L = L \frac{di}{dt}$

PRIJELAZNE POJAVE

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$E - i(R + R_0) - L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{diferencijalna jednažba!}$$

Početak:
 $t = +0 \text{ s} \quad i = I_1 = \frac{E}{R}$

Kraj:
 $t = +\infty \text{ s} \quad i = I_2 = \frac{E}{R + R_0}$

ukupna struja prijelazne pojave

$$i = i' + i''$$

trajna struja $i' = I_2 = \frac{E}{R + R_0}$

prijelazna struja $i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

konstanta integracije $\tau = \frac{L}{R + R_0}$

PRIJELAZNE POJAVE

Struja prijelazne pojave

$$i = I_2 + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A odredimo iz početnog uvjeta

Početni uvjet

$$I_1 = I_2 + A \Rightarrow A = I_1 - I_2$$

$t = +0$
 $i(+0) = I_1 = \frac{E}{R}$

Rješenje

$$i = I_2 + (I_1 - I_2) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

PRIJELAZNE POJAVE

Prijelazne pojave u mreži s otporom i kapacitetom

PRIJELAZNE POJAVE

➤ Priključak napona na krug s otpornikom i kapacitetom

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$E - iR - u_C = 0 \quad \text{diferencijalna jednažba!}$$

Početak:
 $t = +0 \text{ s} \quad i = I = \frac{E}{R} \quad u_C = 0$

Kraj:
 $t = +\infty \text{ s} \quad i = 0 \quad u_C = E$

napon na kondenzatoru

PRIJELAZNE POJAVE

$q = C u_C \quad \text{diferenciramo po } t$

napoj na kondenzatoru $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

$$E - iR - u_C = 0$$

diferencijalna jednažba!

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E$$

vremenska konstanta $\tau = RC$

$$u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = E$$

PRIJELAZNE POJAVE

Napon na kondenzatoru

$$u_C = u_C' + u_C''$$

trajni napon $u_C' = E$

prijelazni napon $u_C'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

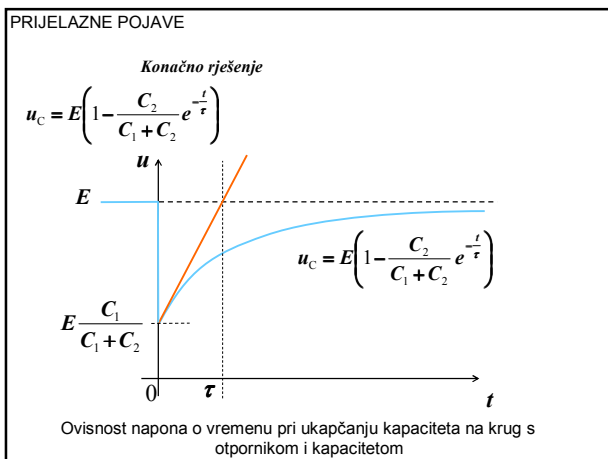
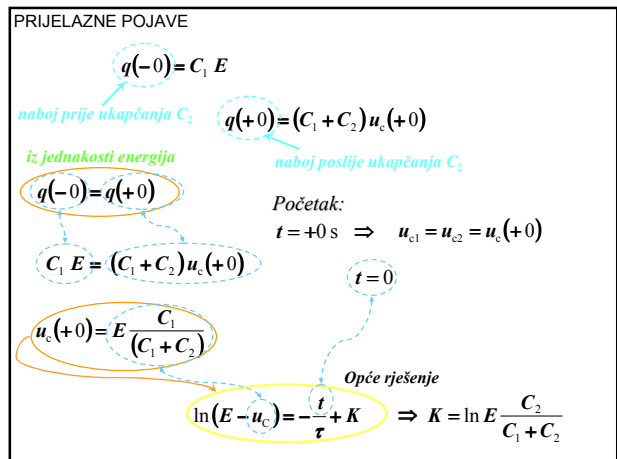
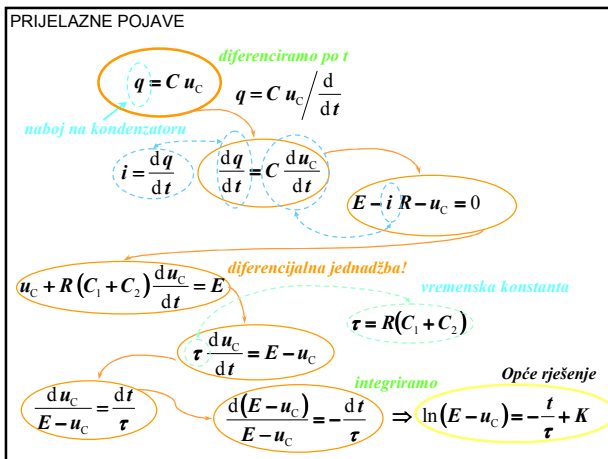
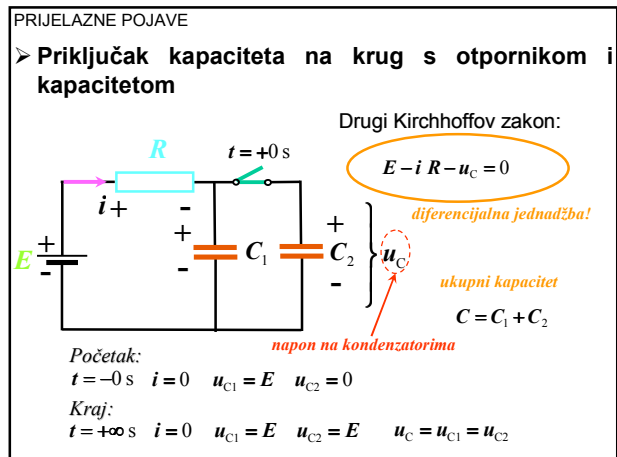
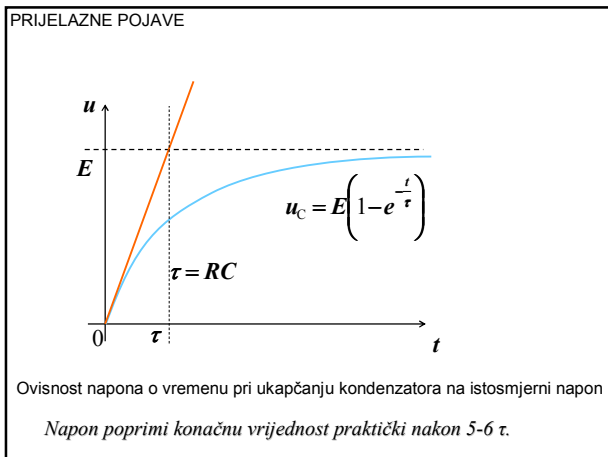
$$u_C = E + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Početni uvjet

$$0 = E + A \Rightarrow A = -E$$

$t = +0 \text{ s}$
 $u_C(+0) = 0 \text{ V}$

Rješenje $u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$



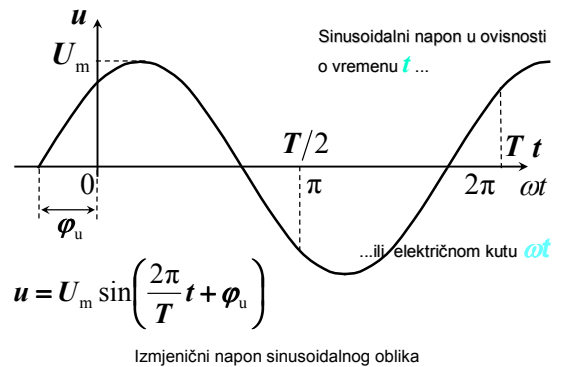
Sinusoidalne struje i naponi

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

■ U elektrotehnici najznačajniju primjenu imaju sinusne veličine:

- struja i : $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$
fazni pomak u odnosu na $\omega t = 0$
- napon u : $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$
- elektromotorna sila e : $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI



SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

■ Uz frekvenciju f , odn. periodu T , izraz za napon je:

$$u = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_u\right) = U_m \sin(2\pi f t + \varphi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

■ Veličina $\omega = 2\pi f$ naziva se kružna frekvencija.

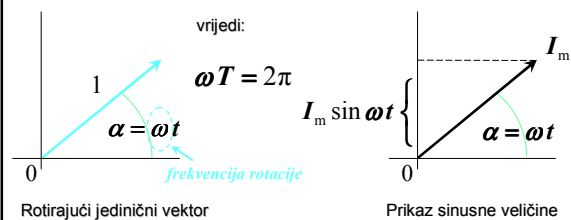
■ Jedinica mjere za kružnu frekvenciju:

$$[\omega] = [1] \cdot [f] = \frac{1}{s}$$

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

■ Sinusne veličine promatramo pomoću rotirajućih vektora.

■ Sinusna veličina - projekcija rotirajućeg vektora na ordnatnu os.



SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

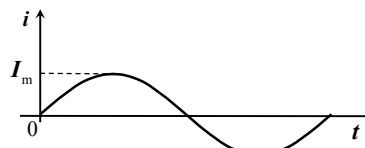
Fazni kut

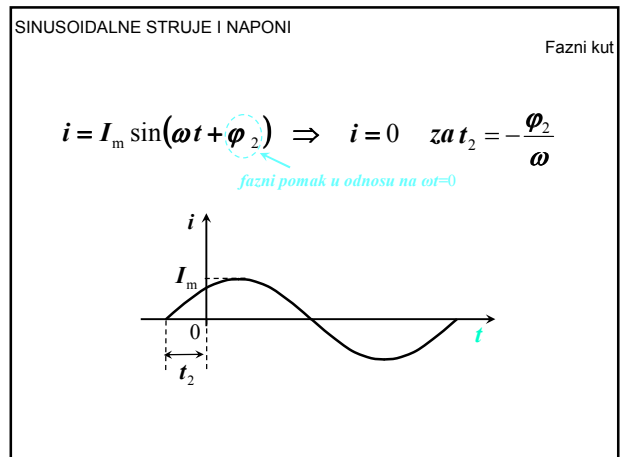
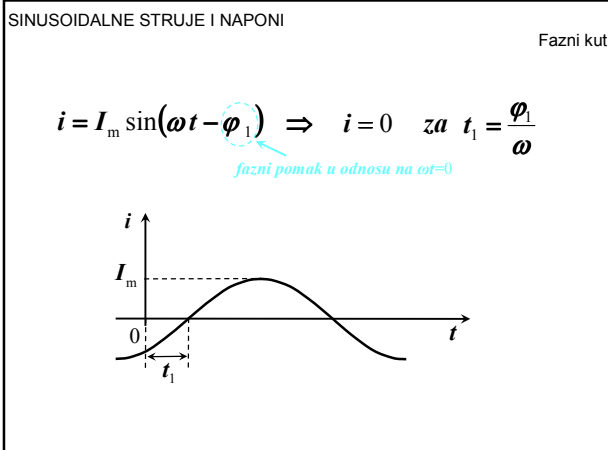
SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

Fazni kut

■ Opći izrazi za sinusnu struju:

$$i = I_m \sin \omega t \Rightarrow i = 0 \text{ za } t = 0$$





SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

Srednja i efektivna vrijednost sinusnih veličina

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI Srednja i efektivna vrijednost

- Matematička srednja vrijednost sinusoidalne struje:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t \, dt = 0$$
- Srednja vrijednost (elektrolitska) sinusoidalne struje:

$$I_a = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} I_m \cong 0.6366 I_m$$
- Efektivna vrijednost sinusoidalne struje:

$$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin \omega t]^2 \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

Faktori sinusnih veličina

SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

- Faktori sinusnih veličina:
 - tjemeni faktor: $\sigma = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cong 1.414$
 - faktor oblika: $\xi = \frac{I}{I_a} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{I_m}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111$
 - srednji faktor: $\zeta = \frac{I_a}{I_m} = \frac{\frac{I_m}{2}}{I_m} = \frac{2}{\pi} \cong 0.6366$

Osnovni učinci izmjeničnih struja

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

- Električna izmjenična struja stvara više učinaka.
- Najčešći učinci su:
 - elektrolitički ili kemijski učinak,
 - toplinski učinak,
 - elektromagnetski učinak.

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Elektrolitički učinak

- Količina izlučene materije u elektrolizi proporcionalna je količini protjecanog naboja:

$$dm = a dq = a i dt$$

iskustveni faktor koji ovisi o vrsti iona

pretpostavka

Promatrana struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ $\varphi_i = 0$

Količina izlučene materije $t_0 = k T$ *promatrano vrijeme*

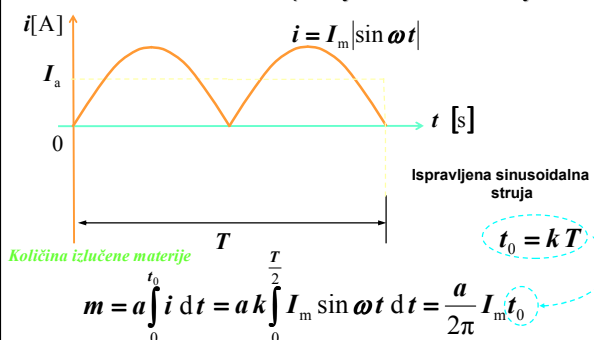
$$m = a \int_0^{t_0} i dt = a k \int_0^T I_m \sin \omega t dt = 0$$

Čista izmjenična struja ne može se koristiti za elektrolizu!

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

Elektrolitički učinak

- Za elektrolizu se koristi ispravljena sinusna struja.



OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Toplinski učinak

- Izmjenična struja u radnom otporu razvija snagu:

$$P = I^2 R$$

efektivna vrijednost struje

- Razvijena toplinska energija iznosi (Jouleov zakon):

$$Q = P t$$

- Toplina u otporu nastaje zbog odavanja energije gibajućih električnih naboja česticama kristalne strukture vodiča.

- Smjer struje ne utječe na količinu razvijene topline.

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Elektromagnetski učinak

- Osnovni efekti elektromagnetskog učinka su:

- stvaranje magnetskih polja,
- stvaranje elektromagnetskih valova.

- Stvaranje magnetskih polja karakteristično je za niske frekvencije.

- Elektromagnetski valovi nastaju kod visokih frekvencija.

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA Elektromagnetski učinak

• **Stvaranje magnetskog polja**

■ Električna struja stvara magnetsko polje (Biot-Savartov zakon):

$$d\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Biot-Savartov zakon

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA Elektromagnetski učinak

■ Faradayev zakon elektromagnetske indukcije - promjena magnetskog toka kroz svaki zavoj izaziva induciranje napona:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Kirchhoffov zakon za zatvorenu petlju

$$iR + \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA Elektromagnetski učinak

■ Faradayev zakon elektromagnetske indukcije za zavojnicu:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

ulančani tok

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt}$$

Kirchhoffov zakon za krug

$$u = iR + \frac{d\Psi}{dt}$$

magnetska os

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA

- Ako sinusna struja teče kroz zavojnicu, s promjenom smjera struje mijenja se i smjer indukcije.
- Nastane izmjenično pulzirajuće magnetsko polje.
- Magnetska os ostaje konstantna.

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA Elektromagnetski učinak

- Induciranje napona važno je za princip rada transformatora.
- U rotacijskim strojevima izmjenične struje (sinkroni i asinkroni) stvara se rotacijsko magnetsko polje.
- U osnovi rada tih strojeva je također induciranje napona.

OSNOVNI UČINCI IZMJENIČNIH STRUJA Elektromagnetski učinak

• **Stvaranje elektromagnetskih valova**

- Kod visokih frekvencija jako je izraženo isijavanje energije.
- Nastaju elektromagnetski valovi.
- Valne pojave opisuju jednačbe koje se izvode iz sustava Maxwellovih jednačbi.
- Valne pojave su u osnovi rada radija i televizije.

Principi rada klasičnih mjernih instrumenata

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA

- Princip rada proizlazi iz Lorentzove sile:

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Električno polje između razdvojenih naboja *Vektor induciranog električnog polja*

- Pretpostavka: gibanje je linearno, iako je rotacijsko.
- Drugi član jednadžbe:

$$d\vec{F}_m = dq \vec{v} \times \vec{B}$$

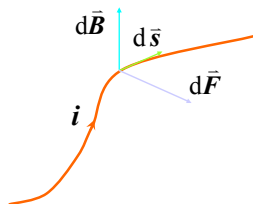
PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA

$$d\vec{F}_m = dq \vec{v} \times \vec{B} = dq \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F}_m = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

element struje

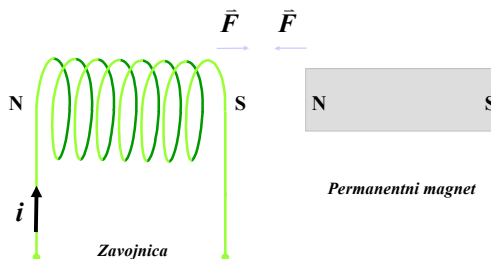
- Na element struje djeluje sila od vanjskog magnetskog polja.



PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA

Instrument s permanentnim magnetom

- Instrument s permanentnim magnetom sadrži u sebi svitak i permanentni magnet.



PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA Instrument s permanentnim magnetom

- Sinusna struja u zavojnici stvara izmjenični tok Φ_1 .
- Permanentni magnet možemo nadomjestiti djelovanjem konstantne struje I koja stvara konstantni tok Φ_2 .

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}_1 = I d\vec{s} \times \vec{B}_i$$

indukcija od permanentnog magneta *nadomjesna struja permanentnog magneta*
Sila između zavojnice i magneta *indukcija od struje kroz zavojnicu*
sila na svitak *sila na magnet*

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA Instrument s permanentnim magnetom

Struja u zavojnici

$$i_1 = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$$

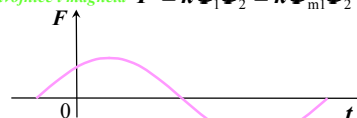
Magnetski tok koji stvara struja zavojnice

$$\Phi_1 = \Phi_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Magnetski tok permanentnog magneta

$$\Phi_2 = \Phi_{m2} = \text{konst.}$$

Sila između zavojnice i magneta $F = k \Phi_1 \Phi_2 = k \Phi_{m1} \Phi_{m2} \sin(\omega t + \varphi_1)$



PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s permanentnim magnetom

- Srednja vrijednost sile je jednaka nuli.
- Za mjerenje izmjeničnih veličina treba struju i_1 ispraviti.
- Uz ispravljanje instrument s permanentnim magnetom može mjeriti srednje vrijednosti izmjeničnih struja.

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA

➤ Instrument s dva svitka

- Instrument s dva svitka radi na principu privlačne sile koja nastaje kad kroz svitke teku struje.

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s dva svitka

Struje u zavojnicama 1 i 2

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Magnetski tokovi koje stvaraju struje zavojnica 1 i 2

$$\Phi_1 = \Phi_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Sila na zavojnicu $d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$

$B = k_2 \Phi_2$ (zavojnica 2)

$i = k_1 \Phi_1$ (zavojnica 1)

Sila između zavojnica $F = k \Phi_1 \Phi_2$

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s dva svitka

Sila između zavojnica $F = k \Phi_1 \Phi_2$

Magnetski tokovi koje stvaraju struje zavojnica 1 i 2

$$\Phi_1 = \Phi_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$F = k \Phi_{m1} \Phi_{m2} \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$F = C I_1 I_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s dva svitka

Sila između zavojnica

$$F = C I_1 I_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

konstanta

kosinusni član dvostruke frekvencije

$F_t = -C I_1 I_2 \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$

$F_c = C I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

Instrument ne može pratiti frekvenciju 2ω zbog tromosti - pokazuje srednju vrijednost.

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s dva svitka

- Ako ista struja i teče kroz oba svitka, vrijedi: $i = i_1 = i_2$
- Jednake su i efektivne vrijednosti: $I = I_1 = I_2$
- Sila iznosi: $F = C_i I_1 I_2 = C_i I^2$

Instrument s dva svitka može mjeriti efektivnu vrijednost struje.

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s dva svitka

Struja u zavojnici 1
proporcionalna naponu

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) \equiv k_u u$$

Struja u zavojnici 2
proporcionalna struji

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) \equiv k_i i$$

Sila među zavojnicama

$$F = C_p U I = C_p P$$

Snaga

Instrument s dva svitka može mjeriti snagu - glavna primjena!

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA

► Instrument s mekim željezom

■ Instrument s mekim željezom sadrži svitak i meko željezo.

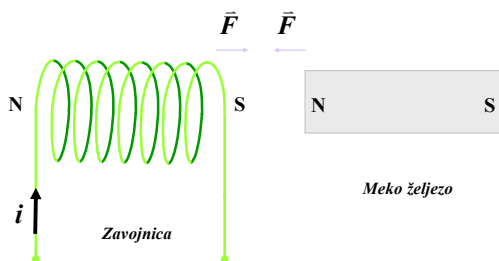
■ Kroz svitak teče struja: $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$

■ Struja stvori magnetski tok: $\Phi_1 = \Phi_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$

■ Meko željezo se u magnetskom polju magnetizira i stvori magnetski tok:

$$\Phi_2 = k_2 \Phi_1$$

PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s mekim željezom



PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s mekim željezom

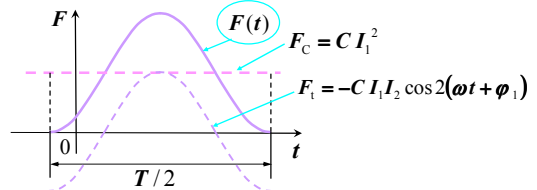
Sila između magneta

$$F = k \Phi_1 \Phi_2$$

$$\Phi_2 = k_2 \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \Phi_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$F = k_{12} \Phi_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) = C I_1^2 [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_1)]$$



PRINCIPI RADA KLASIČNIH MJERNIH INSTRUMENATA
Instrument s mekim željezom

Sila između magneta

$$F = C I_1^2 [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_1)]$$

■ Zbog tromosti instrument s mekim željezom ne može pratiti frekvenciju 2ω .

Srednja vrijednost sile

$$F_a = C I_1^2$$

Instrument s mekim željezom pokazuje efektivnu vrijednost struje.

Priključak **R**, **L** i **C** na izmjenični napon

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

➤ **Priključak otpornika na izmjenični napon**

$f \ll \omega \Rightarrow \omega L \neq 0$

$\Psi = L i$

izmjenično napajanje niske frekvencije

$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

Ohmov zakon vrijedi približno: $i \approx \frac{u}{R}$

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

Priključak otpornika na izmjenični napon

otpor R , induktivitet L , kapacitet C

Nadomjesna shema realnog otpornika za izmjenične struje

idealni radni otpor R , idealni induktivitet L

$R \ll \frac{1}{\omega C}$

Nadomjesna shema realnog otpornika za niske frekvencije

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

Priključak otpornika na izmjenični napon

Drugi Kirchhoffov zakon:

$u \cong iR + \frac{d\Psi}{dt} = iR + \frac{d}{dt}(Li)$ *diferencijalna jednačba!*

$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

Pretpostavka
 $R \gg \omega L \Rightarrow i(t) \cong \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi)$

idealni radni otpor

$\varphi_i = \varphi_u = \varphi$

$I_m = \frac{U_m}{R}$

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

Priključak otpornika na izmjenični napon

$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ } $\varphi_i = \varphi_u = \varphi$

Struja i napon su proporcionalni i u fazi!

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

➤ **Priključak prigušnice na izmjenični napon**

$u_L = \frac{d\Psi}{dt}$

Pretpostavka
 $\omega L \gg R$
 $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$

idealni induktivitet

Drugi Kirchhoffov zakon:

$u - \frac{d\Psi}{dt} \cong 0$ *diferencijalna jednačba!*

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON

Priključak prigušnice

$u - \frac{d\Psi}{dt} = 0$ *diferencijalna jednačba!*

Ulančani tok $\Psi = L i$ *Pretpostavka* $L = konst.$

$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$u - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u}{L} \Rightarrow di = \frac{u}{L} dt$

integriramo

$\Rightarrow di = \frac{U_m}{L} \sin(\omega t + \varphi_u) dt \Rightarrow$ *Opće rješenje*

$i = \frac{U_m}{L} \int \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \frac{U_m}{\omega L} [-\cos(\omega t + \varphi_u)] + C_{int}$

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON
 Priključak prigušnice

Opće rješenje

$$i = \frac{U_m}{\omega L} [-\cos(\omega t + \varphi_u)] + C_{int}$$

Za trajni sinusni napon trajna struja ne može imati istosmjernu komponentu, pa je:

$$C_{int} = 0 \Rightarrow i = \frac{U_m}{\omega L} [-\cos(\omega t + \varphi_u)] = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2})$$

Konačno rješenje

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Maksimalna struja

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

Fazni pomak struje prema naponu $\varphi_i = \varphi_u - \frac{\pi}{2}$

Struja kroz induktivitet kasni za naponom na induktivitetu za kut $\pi/2$!

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON
 Priključak prigušnice

Pretpostavka
 $\varphi_u = 0 \Rightarrow \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

Napon $u(t) = U_m \sin \omega t$ *Struja* $i = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON
 > Priključak kondenzatora na izmjenični napon

Pretpostavka

$$\frac{1}{\omega C} \ll R$$

$$\frac{1}{\omega C} \ll \omega L$$

idealni kapacitet

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$u - u_C \cong 0$$

diferencijalna jednažba!

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON
 Priključak kondenzatora

Diferenciramo po t

$$q = C u_C \Rightarrow q = C \frac{du_C}{dt}$$

naboj na kondenzatoru

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

$u_C = u$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = C \frac{d}{dt} [U_m \sin(\omega t + \varphi_u)] = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Maksimalna struja $I_m = \frac{U_m}{\omega C}$ *Fazni pomak struje prema naponu* $\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$ $i = \frac{U_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2})$

Struja kroz kapacitet prethodi naponu na kapacitetu za kut $\pi/2$!

PRIKLJUČAK R, L I C NA IZMJENIČNI NAPON
 Priključak kondenzatora

Konačno rješenje

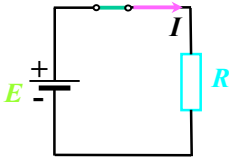
$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Pretpostavka $\varphi_u = 0 \Rightarrow \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ *Napon* $u(t) = U_m \sin \omega t$ *Struja* $i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Snaga i energija kod izmjeničnih struja

SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

■ Za strujni krug istosmjerne struje vrijedi:



Struja kroz otpor $I = \frac{E}{R}$

Snaga na otporu $P = EI = I^2 R = \frac{E^2}{R}$

■ Kod izmjeničnih struja definiramo trenutnu snagu na elementu:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

Napon $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

Struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

Snaga

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Srednja snaga $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$

■ Izmjenična snaga ima dva dijela:

- konstantni - srednja radna snaga (učinak),
- izmjenični, karakteriziran frekvencijom 2ω i kutem $(\varphi_u + \varphi_i)$.

SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Snaga na radnom otporu

Napon $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$
 Struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ } $\varphi_i = \varphi_u = \varphi$

Snaga $p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + 2\varphi)]$

Srednja radna snaga $P = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} \sqrt{2} U \sqrt{2} I = UI$

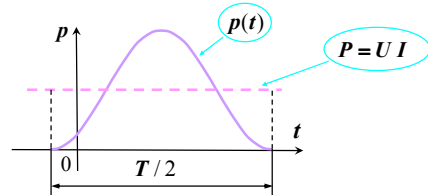
SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

Snaga na otporu

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)]$$

Srednja radna snaga

$$P = UI$$



SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Snaga na induktivitetu

Napon $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$
 Struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ } $\varphi_i = \varphi_u - \frac{\pi}{2}$

Snaga na induktivitetu $p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i + \frac{\pi}{2}) - \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \frac{\pi}{2})]$

$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [-\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \frac{\pi}{2})]$

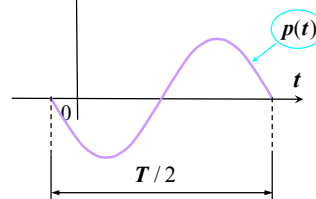
Srednja radna snaga $P = 0$

SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

■ Srednja snaga (radna) na induktivitetu je jednaka nuli.

■ Postoji samo osciliranje energije između induktiviteta i izvora.

Snaga na induktivitetu $p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [-\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \frac{\pi}{2})]$



SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Snaga na kapacitetu

Napon $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ } $\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$
 Struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ }
struja je pomaknuta u fazi

Snaga na kapacitetu

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \left[\cos\left(\frac{\varphi_u - \varphi_u - \pi}{2}\right) - \cos\left(2\omega t + 2\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \left[-\cos\left(2\omega t + 2\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Srednja radna snaga
 $P = 0$

SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

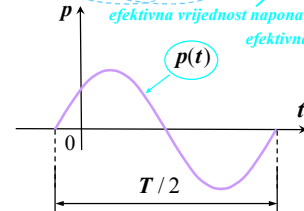
Snaga na kapacitetu

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \left[-\cos\left(2\omega t + 2\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Prividna snaga

$$S = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} \sqrt{2} U \sqrt{2} I = UI$$

efektivna vrijednost napona
efektivna vrijednost struje



SNAGA I ENERGIJA KOD IZMJENIČNIH STRUJA

➤ Sažetak

a) Otpor

Radna snaga $P = UI$ Prividna snaga $S = UI$ $\Rightarrow P = S$

b) Induktivitet

Radna snaga $P = 0$ Prividna snaga $S = UI$

c) Kapacitet

Radna snaga $P = 0$ Prividna snaga $S = UI$

Fazorski račun

FAZORSKI RAČUN

■ Struje i naponi su kod određene frekvencije ω karakterizirani amplitudom i fazom:

– struja i : $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$
amplituda *fazni pomak u odnosu na $\omega t = 0$*

– napon u : $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

– elektromotorna sila e : $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$

■ Račun sa sinusnim veličinama je složen.

FAZORSKI RAČUN

Primjer

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$i_3 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Pretpostavka $I_{m1} = I_{m2} = I_m$

$$i_3 = 2I_m \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

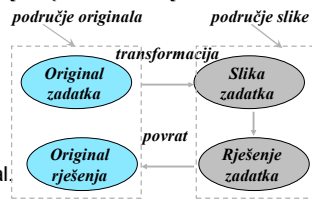
Dobije se vrlo složen izraz!

FAZORSKI RAČUN

- Za pojednostavljenje računa koristi se kompleksna metoda.
- To je simbolička metoda - realne sinusne veličine simboliziramo kompleksnim brojevima.
- Tu se radi o transformaciji ili preslikavanju.

■ Zadatak rješavamo:

- postavimo u originalu,
- preslikamo ga,
- riješimo u području slike,
- rješenje vratimo u original.



FAZORSKI RAČUN

■ Kompleksni broj određuju dva podatka:

- realni dio,
- imaginarni dio.

Kompleksni brojevi $\underline{A} = a_1 + j a_2$ $j = \sqrt{-1}$

$\underline{B} = b_1 + j b_2$

Suma $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$ jednostavno!

Prikaz kompleksne veličine $\underline{A} = A e^{j\varphi_A}$ eksponencijalni oblik

$\underline{A} = A \cos \varphi_A + j A \sin \varphi_A$ trigonometrijski oblik

realni dio $a_1 = A \cos \varphi_A$ imaginarni dio $a_2 = A \sin \varphi_A$

FAZORSKI RAČUN

Kompleksni prikaz sinusne veličine

$\underline{A} = A \cos \varphi_A + j A \sin \varphi_A$ trigonometrijski oblik

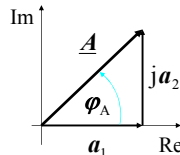
$a_1 = \text{Re}(\underline{A}) = A \cos \varphi_A$ $a_2 = \text{Im}(\underline{A}) = A \sin \varphi_A$

Modul

$A = |\underline{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Argument

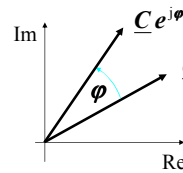
$\varphi_A = \arctg \frac{\text{Im}(\underline{A})}{\text{Re}(\underline{A})} = \arctg \frac{a_2}{a_1}$



Grafički prikaz kompleksnog broja

FAZORSKI RAČUN

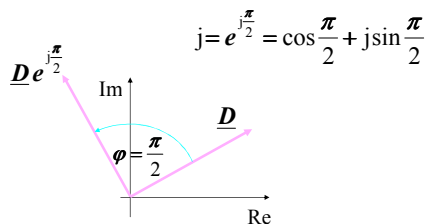
Množenje kompleksnog broja s $e^{j\varphi}$ znači zakretanje u pozitivnom smjeru za kut φ .



Grafički prikaz množenja kompleksnog broja s $e^{j\varphi}$

FAZORSKI RAČUN

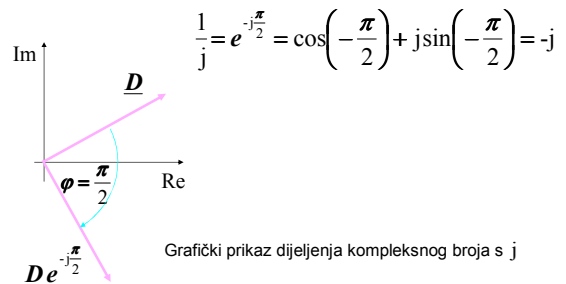
Množenje kompleksnog broja s imaginarnom jedinicom j znači zakretanje u pozitivnom smjeru za kut $+\pi/2$.



Grafički prikaz množenja kompleksnog broja s j

FAZORSKI RAČUN

Dijeljenje kompleksnog broja s imaginarnom jedinicom j znači zakretanje za kut $-\pi/2$.

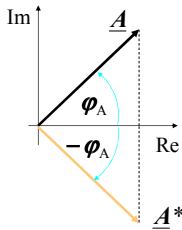


Grafički prikaz dijeljenja kompleksnog broja s j

FAZORSKI RAČUN

Kompleksni broj $\underline{A} = Ae^{j\varphi_A} = a_1 + ja_2$

Konjugirano kompleksni broj $\underline{A}^* = Ae^{-j\varphi_A} = a_1 - ja_2$



Vrijedi $\underline{A} \cdot \underline{A}^* = Ae^{j\varphi_A} \cdot Ae^{-j\varphi_A} = A^2$

$\text{Re}(\underline{A}) = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^*)$

$\text{Im}(\underline{A}) = \frac{1}{2j}(\underline{A} - \underline{A}^*)$

Grafički prikaz konjugirano kompleksnog broja

FAZORSKI RAČUN

➤ Fazor

Sinusna funkcija $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

Eksponecijalna funkcija

$I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + j I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

Vrijedi

$i = \text{Im}\{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}\}$

Sinusna funkcija je jednaka imaginarnom dijelu eksponencijalne funkcije!

FAZORSKI RAČUN

$I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$

Fazor

$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$
 (amplituda) (faza)

■ Fazor karakteriziraju dva podatka (kod neke frekvencije ω):

- amplituda,
- faza (za $t=0$).

FAZORSKI RAČUN

➤ Preslikavanje

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$
 (original) (slika)

Deriviranje

$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$
 (original) (slika)

$\frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$

FAZORSKI RAČUN

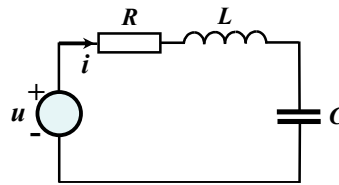
Integriranje

$\int_0^t i(t) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_i) \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} \frac{I_m}{j\omega} e^{j\omega t}$
 (original) (slika)

$\int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} \frac{I_m}{j\omega} e^{j\omega t}$

FAZORSKI RAČUN

➤ Primjer



Stacionarno stanje

$u(t) \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} \underline{U}_m e^{j\omega t}$

$i(t) \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} \underline{I}_m e^{j\omega t}$

$\frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$

$\int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\text{znak preslikavanja}} \frac{I_m}{j\omega} e^{j\omega t}$

$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t)$

diferencijalno-integralna jednačba!

U stacionarnom stanju imamo samo sinusne veličine!

FAZORSKI RAČUN

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t)$$

Preslikana jednačba kruga

$$R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad /: e^{j\omega t}$$

algebarska jednačba!

$$\underline{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \qquad \underline{I}_m \underline{Z} = \underline{U}_m$$

FAZORSKI RAČUN

Radni otpor

R Induktivni otpor

$$X_L = \omega L$$

Kapacitivni otpor

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Ukupni otpor - impedancija

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

Fazori efektivnih vrijednosti struje i napona

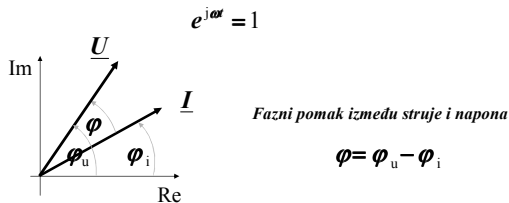
$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

Umjesto maksimalnih vrijednosti struje i napona možemo koristiti efektivne vrijednosti!

FAZORSKI RAČUN

■ Fazore prikazujemo u kompleksnoj ravnini za $t=0$:



Grafički prikaz fazora efektivnih vrijednosti struje i napona

Umjesto maksimalnih vrijednosti struje i napona možemo koristiti efektivne vrijednosti!

■ Označavanje fazora: \underline{I} (u literaturi $\bar{I}, \hat{I}, \hat{I} \dots$)

FAZORSKI RAČUN

➤ Računske operacije s kompleksnim brojevima

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = A e^{j\varphi_A}$$

$$\underline{B} = b_1 + jb_2 = B e^{j\varphi_B}$$

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}$$

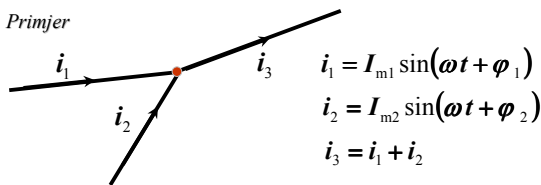
$$\underline{A} \cdot \underline{B} = a_1 b_1 - a_2 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2}$$

FAZORSKI RAČUN

Primjer



Kompleksni račun $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1} = I_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$
 $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2} = I_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$

$$I_3 = \sqrt{(I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2)^2 + (I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2)^2}$$

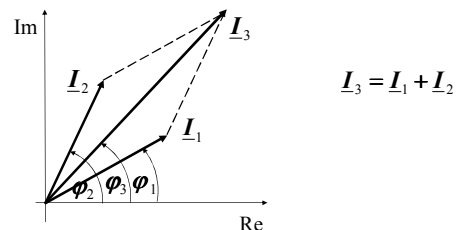
$$\varphi_3 = \arctg \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2}$$

FAZORSKI RAČUN

➤ Geometrijska interpretacija

■ Kompleksne brojeve prikazujemo vektorima.

■ Vrijede računске operacije za vektore.



Grafički prikaz zbrajanja fazora struja