Snaga u mrežama sinusne struje

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Napon $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

Struja $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$2 \sin\alpha \sin\beta$

Snaga – trenutna vrijednost

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U I\, 2\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$p(t) = U I \left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

konstanta — *kosinusni član dvostruke frekvencije*

$\cos(\alpha + \beta)$

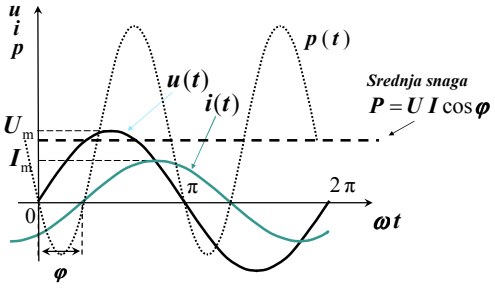
$$p(t) = U I \left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(\varphi_u + \varphi_i)\cos 2\omega t + \sin(\varphi_u + \varphi_i)\sin 2\omega t\right]$$

pojednostavljenje $\varphi_u = 0 \Rightarrow \varphi = -\varphi_i$

$$p(t) = U I \cos\varphi (1 - \cos 2\omega t) - U I \sin\varphi \sin 2\omega t$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

$$p(t) = U I \cos\varphi - U I \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$



Vremenski prikaz sinusnog napona, struje i snage

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Ukupna snaga – trenutna vrijednost

$$p(t) = U I \cos\varphi (1 - \cos 2\omega t) - U I \sin\varphi \sin 2\omega t$$

Radna snaga

$$P = UI \cos\varphi \qquad [\mathrm{W}]$$

Jalova snaga

$$Q = UI \sin\varphi \qquad [\mathrm{var}]$$

Prividna snaga

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = UI \qquad [\mathrm{VA}]$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

- Jalova snaga ne sudjeluje u vršenju rada.
- Potrebna je za funkcioniranje uređaja (transformatori, električni strojevi), najčešće za stvaranje magnetskog polja.
- Ona dodatno opterećuje vodove - treba je smanjiti.
- Smanjenje jalove snage se postiže kompenzacijom jalove snage.
- Prividna snaga je mjerodavna za dimenzioniranje uređaja.

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Napon $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$

Struja $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$

Produkt $\underline{U} \cdot \underline{I} = UI\, e^{j(\varphi_u + \varphi_i)} =$

$$= UI\left[\cos(\varphi_u + \varphi_i) + j\sin(\varphi_u + \varphi_i)\right]$$

Produkt fazora napona i struje ne daje tražene snage ***P*** *i* ***Q****!*

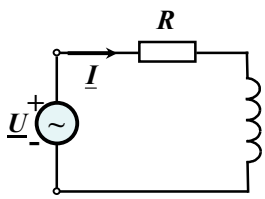
$$P = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) \qquad Q = UI\sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Kompleksna snaga $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = UI\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} =$

$$= UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + jUI\sin(\varphi_u - \varphi_i) = P + jQ$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

➢ Snaga R,L kruga



Naponska jednadžba:

$$\underline{U} = \underline{I}(R + \mathrm{j}\omega L) = \underline{I}(R + \mathrm{j}X_\mathrm{L})$$

Impedancija

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X_\mathrm{L}$$

Struja

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} e^{\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{Z})}$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Efektivna vrijednost struje

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}}$$

Fazor struje

$$\underline{I} = I\, e^{\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{Z})}$$

Konjugirano-kompleksna vrijednost struje

$$\underline{I}^* = I\, e^{-\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{Z})}$$

Kompleksna snaga

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U\, e^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{u}} I\, e^{-\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{Z})} = U \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} e^{\mathrm{j}(\cancel{\varphi_\mathrm{u}} - \cancel{\varphi_\mathrm{u}} + \varphi_\mathrm{Z})}$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Kompleksna snaga

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} e^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Z}} =$$

$$= \frac{U^2}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} (\cos\varphi_\mathrm{Z} + \mathrm{j}\sin\varphi_\mathrm{Z}) =$$

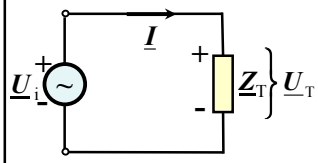
$$= \frac{U^2}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} + \mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{\sqrt{R^2 + X_\mathrm{L}^2}} \right) =$$

$$= \frac{U^2}{R^2 + X_\mathrm{L}^2}(R + \mathrm{j}X_\mathrm{L}) = I^2 R + \mathrm{j} I^2 X_\mathrm{L} = P + \mathrm{j}Q$$

Radna snaga $P = I^2 R$ *Jalova snaga* $Q = I^2 X_\mathrm{L}$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

➢ Snaga izvora



Impedancija trošila

$$\underline{Z}_\mathrm{T} = R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T}$$

Drugi Kirchhoffov zakon:

$$\underline{U}_\mathrm{i} - \underline{U}_\mathrm{T} = 0$$

pomnožimo s $\underline{I}^*$

$$\underline{U}_\mathrm{i} - \underline{U}_\mathrm{T} = 0 \quad / \cdot \underline{I}^*$$

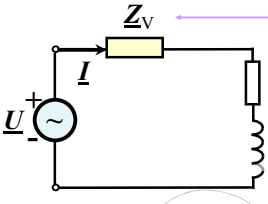
$$\underline{U}_\mathrm{i}\underline{I}^* - \underline{U}_\mathrm{T}\underline{I}^* = 0$$

Snaga izvora $\underline{S}_\mathrm{i} = \underline{U}_\mathrm{i}\underline{I}^*$ *Snaga trošila* $\underline{S}_\mathrm{T} = \underline{U}_\mathrm{T}\underline{I}^*$

Suma snaga u strujnom krugu je jednaka nuli!
Snaga, koju daje izvor, troši se na trošilu.

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

➢ Kompenzacija jalove snage



Impedancija voda

$$\underline{Z}_\mathrm{V} = R_\mathrm{V} + \mathrm{j}X_\mathrm{V}$$

Impedancija trošila

$$\underline{Z}_\mathrm{T} = R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T}$$

Struja I

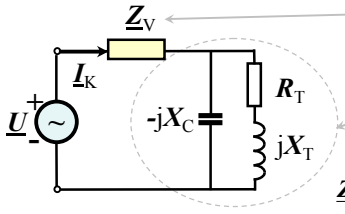
Gubici u vodu

$$P_\mathrm{V} = I^2 R_\mathrm{V} = \left(\frac{U}{\sqrt{(R_\mathrm{V} + R_\mathrm{T})^2 + (X_\mathrm{V} + X_\mathrm{T})^2}} \right)^2 R_\mathrm{V}$$

Jalova snaga voda

$$Q_\mathrm{V} = I^2 X_\mathrm{V}$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE



Impedancija voda

$$\underline{Z}_\mathrm{V} = R_\mathrm{V} + \mathrm{j}X_\mathrm{V}$$

Kompenzirana impedancija trošila

$$\underline{Z}_\mathrm{K} = \frac{-\mathrm{j}X_\mathrm{C}(R_\mathrm{T} + \mathrm{j}X_\mathrm{T})}{R_\mathrm{T} + \mathrm{j}(X_\mathrm{T} - X_\mathrm{C})}$$

Gubici u vodu uz kompenzaciju

$$P_\mathrm{VK} = I_\mathrm{K}^2 R_\mathrm{V} = \left(\frac{U}{|\underline{Z}_\mathrm{V} + \underline{Z}_\mathrm{K}|} \right)^2 R_\mathrm{V}$$

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Omjer gubitaka u vodu s kompenzacijom P_{VK} i bez kompenzacije P_V

$$g = \frac{P_{VK}}{P_V} = \frac{I_K^2}{I^2} = \frac{(R_V + R_T)^2 + (X_V + X_T)^2}{(R_V + R_K)^2 + (X_V - X_K)^2}$$

Kompenzirana impedancija trošila

$$\underline{Z}_K = R_K - jX_K \qquad X_K = \frac{R_T^2 X_C + X_T X_C (X_T - X_C)}{R_T^2 + (X_T - X_C)^2}$$

$$R_K = \frac{R_T X_C^2}{R_T^2 + (X_T - X_C)^2}$$

Ovako ne vidimo što smo dobili kompenzacijom.

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Pretpostavka: $X_C = 2X_T \quad R_V << R_T \quad X_V << R_T$

Kompenzirana impedancija trošila

$$\underline{Z}_K = \frac{4R_T X_T^2 - j(2R_T^2 X_T - 2X_T^3)}{R_T^2 + X_T^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_T = \frac{X_T}{R_T}$$

Omjer gubitaka u vodu: $g \cong \frac{P_{VK}}{P_V} = \frac{I_K^2}{I^2} =$

$$= \frac{(R_T^2 + X_T^2)^3}{(4R_T X_T^2)^2 + 4(R_T^2 X_T - X_T^3)^2} = \frac{1 + \mathrm{tg}^2\varphi_T}{4\mathrm{tg}^2\varphi_T}$$

Za $\cos\varphi = 0.8$ ($\mathrm{tg}\varphi = 0.75$) *omjer gubitaka iznosi* $g \cong 0.694$*!*

SNAGA U MREŽAMA SINUSNE STRUJE

Pretpostavka - impedancija voda je zanemariva

$$\underline{Z}_V = R_V + jX_V \approx 0 \qquad \underline{U} = U$$

Struja tereta

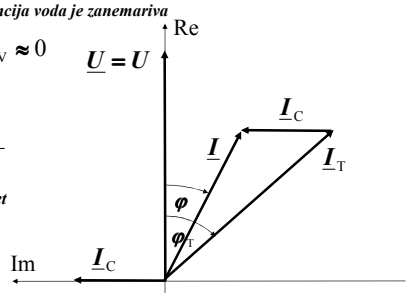
$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}}{R_T + jX_T}$$

Struja kroz kapacitet

$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U}$$

Ukupna struja

$$\underline{I} = \underline{I}_T + \underline{I}_C$$



Utjecaj kapaciteta na ukupnu struju

S povećanjem kapaciteta C *raste struja* $\underline{I}_C$*, a smanjuje se* $\underline{I}$ *i kut* φ*!*

Rezonancija

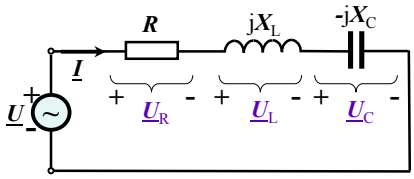
REZONANCIJA

- Rezonancija je pojava da pri određenoj frekvenciji ulazna impedancija mreže ima samo radni otpor - nema reaktivnu komponentu.
- Pri rezonanciji napon izvora i struja su u fazi!
- U složenim mrežama može doći do rezonancije u nekom dijelu mreže.
- Tada su u fazi samo napon i struja u tom dijelu mreže.

REZONANCIJA

Serijska rezonancija (naponska rezonancija)

REZONANCIJA



Naponska jednadžba:

Impedancija $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z e^{\mathrm{j}\varphi_Z}$

$$\underline{U} = \underline{I}\left(R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right) = \underline{I}\cdot\underline{Z}$$

Pri rezonanciji napon izvora i struja su u fazi, a $\varphi_Z = 0$!

REZONANCIJA

Impedancija $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = R$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = X_C$$

Napon

$$\underline{U} = \underline{I}R + \mathrm{j}\underline{I}X_L - \mathrm{j}\underline{I}X_C = \underline{I}R = \underline{U}_R \quad (= 0)$$

Frekvencija rezonancije

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Induktivitet kod kojeg nastupa rezonancija $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$ *poznati su* ω_0 *i* C

Kapacitet kod kojeg nastupa rezonancija $C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$ *poznati su* ω_0 *i* L

REZONANCIJA

Napon na otporu

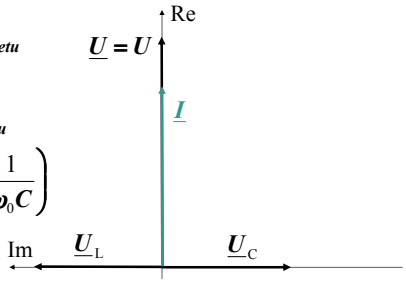
$$\underline{U}_R = \underline{I}R$$

Napon na induktivitetu

$$\underline{U}_L = \underline{I}\cdot\mathrm{j}\omega_0 L$$

Napon na kapacitetu

$$\underline{U}_C = \underline{I}\cdot\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C}\right)$$



Fazorski prikaz napona i struje pri serijskoj rezonanciji

REZONANCIJA

Valni otpor

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Dimenzija valnog otpora

$$[\rho] = \left[\sqrt{\frac{L}{C}}\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{F}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}} = \Omega$$

Naponi na induktivitetu i kapacitetu

$$U_L = U_C = I\rho = U\frac{\rho}{R}$$

Dobrota strujnog kruga

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{\rho}{R}$$

Prigušenje strujnog kruga

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}$$

REZONANCIJA

➢ **Frekvencijske karakteristike impedancije**

Induktivna reaktancija

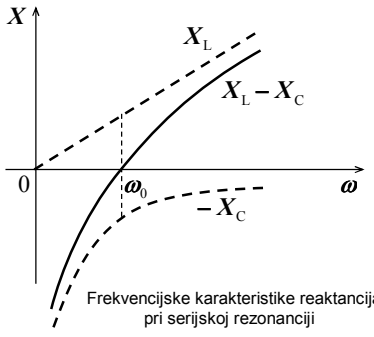
$$X_L = \omega L$$

Kapacitivna reaktancija

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

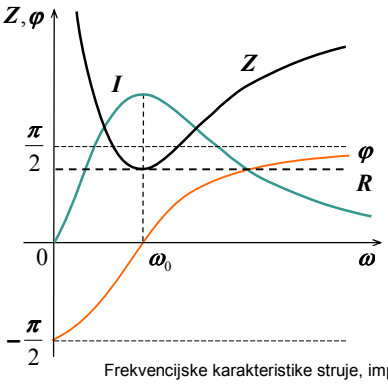
Ukupna reaktancija

$$X = X_L - X_C$$



Frekvencijske karakteristike reaktancija pri serijskoj rezonanciji

REZONANCIJA



Frekvencijske karakteristike struje, impedancije, otpora i faznog kuta pri serijskoj rezonanciji

REZONANCIJA

Struja - frekvencijska ovisnost

$$I(\omega)=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{U}{Z(\omega)}$$

U rezonanciji je struja maksimalna!

Maksimalna struja

$$I=I_0=\frac{U}{R}$$

Valni otpor

$$\rho=\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}$$

Impedancija - frekvencijska ovisnost

$$Z(\omega)=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{R^2+\rho^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

REZONANCIJA

➢ **Frekvencijske karakteristike struje**

Relativna frekvencija $x=\frac{\omega}{\omega_0}$

Impedancija

$$Z=R\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

Dobrota strujnog kruga

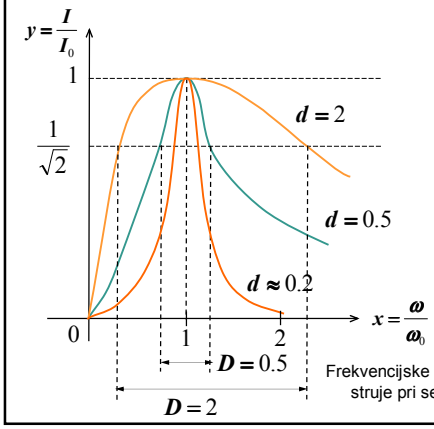
$$Q=\frac{\rho}{R}$$

Svedena - relativna struja

$$y=\frac{I}{I_0}=\frac{R}{Z}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

Struja bitno ovisi o dobroti ***Q*** *, odnosno o prigušenju* ***d***=1/***Q***.

REZONANCIJA



Širina pojasa

$$D=x-\frac{1}{x}$$

Frekvencijske karakteristike svedene struje pri serijskoj rezonanciji

REZONANCIJA

Širina pojasa

$$D=x-\frac{1}{x}=d\sqrt{n^2-1}$$

$$n=\frac{1}{y}=\frac{I_0}{I}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad n=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad D=d$$

Strujni krug može iz skupa raznih frekvencija odvojiti struje određene frekvencije - svojstvo selektivnosti.

Selektivnost je to veća, što je širina ***D*** *manja, odnosno što je manje prigušenje* ***d****.*

REZONANCIJA

➢ **Frekvencijske karakteristike napona**

Napon na otporu

$$U_R=IR$$

Relativna frekvencija $x=\frac{\omega}{\omega_0}$

Napon na induktivitetu

$$U_L=I\omega L=I\,x\,\omega_0 L=I\rho\,x$$

Valni otpor $\rho=\omega_0 L$

Napon na kapacitetu

$$U_C=I\frac{1}{\omega C}=I\frac{1}{\omega_0 C}\cdot\frac{1}{x}=I\rho\frac{1}{x}$$

REZONANCIJA

Struja - frekvencijska ovisnost

$$I=\frac{U}{\rho\sqrt{d^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

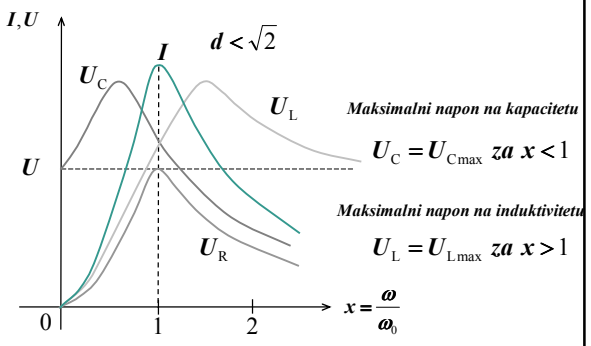
Napon na induktivitetu

$$U_L=I\rho\,x=\frac{U\,x}{\sqrt{d^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

Napon na kapacitetu

$$U_C=I\rho\frac{1}{x}=\frac{U}{x\sqrt{d^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

REZONANCIJA



Maksimalni napon na kapacitetu

$U_C = U_{C\max}$ *za* $x < 1$

Maksimalni napon na induktivitetu

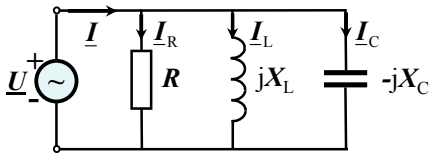
$U_L = U_{L\max}$ *za* $x > 1$

Frekvencijske karakteristike napona pri serijskoj rezonanciji

REZONANCIJA

Paralelna rezonancija (strujna rezonancija)

REZONANCIJA



Naponi

$\underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C = \underline{U}$

Struja

$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$

Admitancija

$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$

Fazni kut

$\varphi_Y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{B_C - B_L}{G}$

Pri rezonanciji napon izvora i struja su u fazi, a $\varphi_Z = 0$!

REZONANCIJA

Susceptancija

$B = \omega C - \dfrac{1}{\omega L} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\omega L} = \omega C$

$B_C = B_L$

Frekvencija rezonancije

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ *Isti izraz kao i za serijsku rezonanciju!*

Induktivitet kod kojeg nastupa rezonancija $L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C}$ *poznati su* ω_0 *i* C

Kapacitet kod kojeg nastupa rezonancija $C = \dfrac{1}{\omega_0^2 L}$ *poznati su* ω_0 *i* L

REZONANCIJA

Struje

$\underline{I}_R = G\underline{U}$

$\underline{I}_L = -\mathrm{j}B_L\underline{U}$ $\quad B_L = \dfrac{1}{X_L}$

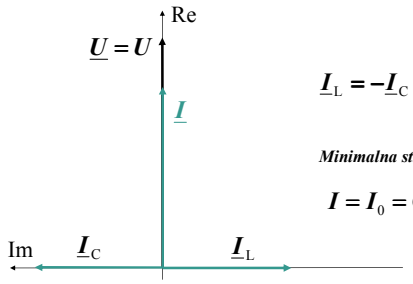
$\underline{I}_C = \mathrm{j}B_C\underline{U}$ $\quad B_C = \dfrac{1}{X_C}$

Ukupna struja

$\underline{I} = \underline{U}G + \mathrm{j}\underline{U}(B_C - B_L) = \underline{U}G \Rightarrow \underline{I}_L = -\underline{I}_C$ $\quad (B_C - B_L = 0)$

U rezonanciji je struja minimalna!

REZONANCIJA



$\underline{I}_L = -\underline{I}_C$

Minimalna struja

$I = I_0 = GU$

Fazorski prikaz napona i struja pri paralelnoj rezonanciji

REZONANCIJA

Valna vodljivost

$$\gamma = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho}$$

Dimenzija valne vodljivosti

$$[\gamma] = \left[\sqrt{\frac{C}{L}}\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}} = \mathrm{S} = \frac{1}{\Omega}$$

Dobrota strujnog kruga

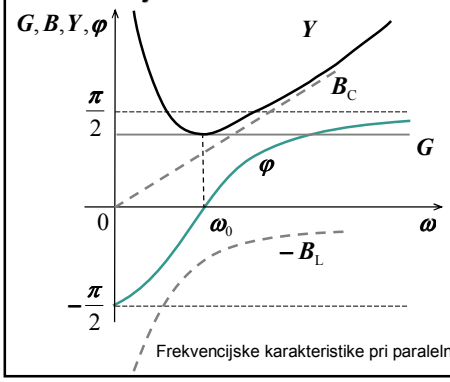
$$Q = \frac{I_\mathrm{L}}{I_0} = \frac{I_\mathrm{C}}{I_0} = \frac{\gamma}{G}$$

Prigušenje strujnog kruga

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{G}{\gamma}$$

REZONANCIJA

➢ **Frekvencijske karakteristike**

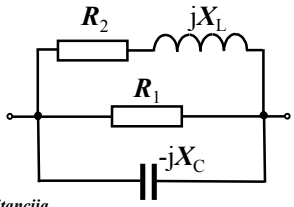


Frekvencijske karakteristike pri paralelnoj rezonanciji

REZONANCIJA

➢ **Primjer**

- Za paralelni spoj prema slici zadani su ω, C, R_1 i R_2. Treba odrediti L za slučaj rezonancije.



Rezonancija

$$\omega = \omega_0$$

$$X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$X_\mathrm{L} = \omega_0 L$$

$$\mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0$$

Admitancija

$$\underline{Y} = \frac{1}{-\mathrm{j}X_\mathrm{C}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}X_\mathrm{L}}$$

REZONANCIJA

Admitancija

$$\underline{Y} = \frac{1}{-\mathrm{j}X_\mathrm{C}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}X_\mathrm{L}} =$$

$$= \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}$$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(\underline{Y}) = \mathrm{j}\omega_0 C - \frac{\mathrm{j}\omega_0 L}{R_2^{\,2} + \omega_0^{\,2} L^2} = 0$$

$$C\left(R_2^{\,2} + \omega_0^{\,2} L^2\right) - L = 0 \Rightarrow \omega_0^{\,2} C L^2 - L + R_2^{\,2} C = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega_0^{\,2} C^2 R_2^{\,2}}}{2\omega_0^{\,2} C}$$

Višefazne struje

VIŠEFAZNE STRUJE

Simetrični sustav n-struja

$$i_1 = I_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i_2 = I_\mathrm{m} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$i_3 = I_\mathrm{m} \sin\left(\omega t + \varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$i_\mathrm{k} = I_\mathrm{m} \sin\left[\omega t + \varphi - (k-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$\vdots$$

$$i_\mathrm{n} = I_\mathrm{m} \sin\left[\omega t + \varphi - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

Vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} i_\mathrm{k} = \sum_{k=1}^{n} I_\mathrm{m} \sin\left[\omega t + \varphi - (k-1)\frac{2\pi}{n}\right] = 0$$

VIŠEFAZNE STRUJE

Fazorski prikaz simetričnog sustava n-struja

$$\sum_{k=1}^{n}\underline{I}_k=\sum_{k=1}^{n}I_m e^{j\varphi}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{n}}=\underline{I}_1\sum_{k=1}^{n}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{n}}=0$$

Suma geometrijskog reda

$$\sum_{k=1}^{n}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{n}}=1+e^{-j\frac{2\pi}{n}}+\ldots+e^{-j(n-1)\frac{2\pi}{n}}$$

n-ti član geometrijskog reda $a_n=a_1q^{n-1}$

Suma geometrijskog reda

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

VIŠEFAZNE STRUJE

Suma geometrijskog reda

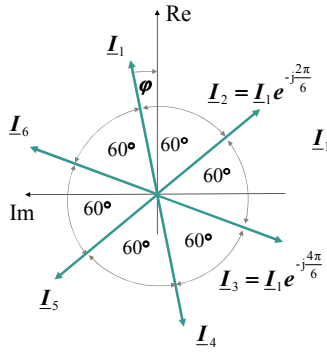
$$\sum_{k=1}^{n}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{n}}=1\frac{e^{-j2\pi}-1}{e^{-j\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{\cos(-2\pi)-j\sin 2\pi-1}{\cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right)-j\sin\frac{2\pi}{n}-1}=$$

$$=\frac{1-j0-1}{\cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right)-j\sin\frac{2\pi}{n}-1}=0$$

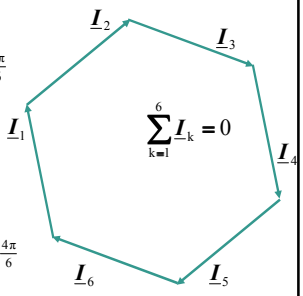
Fazorski prikaz simetričnog sustava n-struja

$$\sum_{k=1}^{n}\underline{I}_k=\underline{I}_1\sum_{k=1}^{n}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{n}}=0$$

VIŠEFAZNE STRUJE

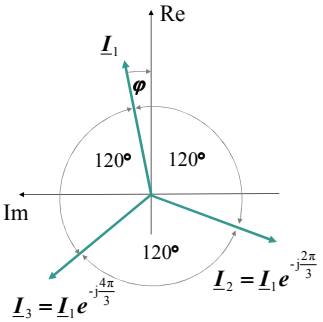


Fazorski prikaz šesterofaznog simetričnog sustava struja

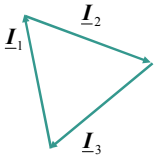


Fazorski zbroj šesterofaznog simetričnog sustava struja

VIŠEFAZNE STRUJE



Fazorski prikaz trofaznog simetričnog sustava struja



Fazorski zbroj trofaznog simetričnog sustava struja

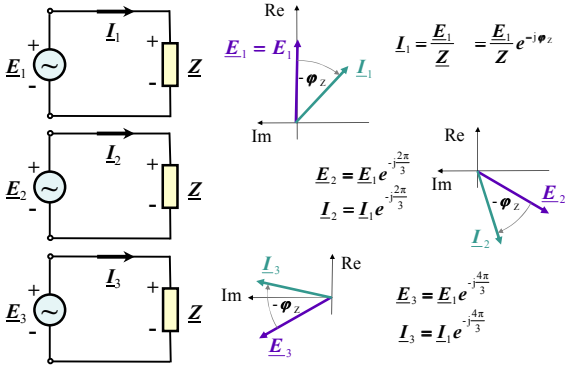
$$\sum_{k=1}^{3}\underline{I}_k=0$$

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0$$

Trofazni sustav

VIŠEFAZNE STRUJE

➢ **Tri odvojena jednofazna kruga**



$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}}=\frac{\underline{E}_1}{Z}e^{-j\varphi_Z}$$

$$\underline{E}_2=\underline{E}_1e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_2=\underline{I}_1e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

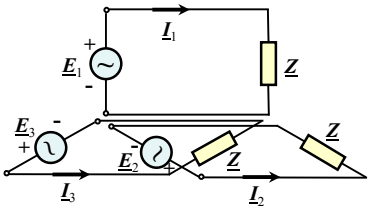
$$\underline{E}_3=\underline{E}_1e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_3=\underline{I}_1e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

VIŠEFAZNE STRUJE

➢ Trofazni sustav

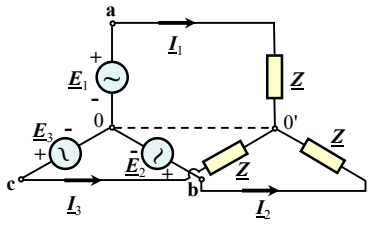
- Tri jednofazna kruga možemo spojiti u jedan trofazni sustav.



- U slučaju simetričnog sustava možemo spojiti tri povratna vodiča.

VIŠEFAZNE STRUJE

➢ Zvijezda spoj izvora i trošila



- U slučaju simetričnog sustava možemo izostaviti povratni vodič jer je suma struja jednaka nuli:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

VIŠEFAZNE STRUJE
Zvijezda spoj izvora i trošila

- Potencijali zvjezdišta 0 i $0'$ su jednaki.
- Ako je jedno zvjezdište uzemljeno, potencijali zvjezdišta su jednaki nuli:

$$\varphi_0 = \varphi_{0'} = 0$$

Fazni naponi

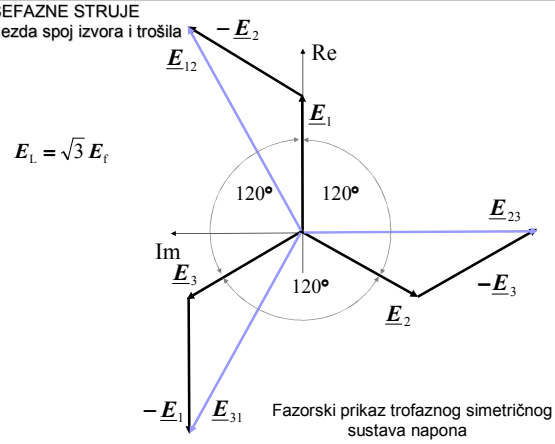
$$\underline{E}_1 = E_1 e^{-j0}$$
$$\underline{E}_2 = \underline{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\underline{E}_3 = \underline{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$
$$E_f = |\underline{E}_1| = |\underline{E}_2| = |\underline{E}_3|$$

Linijski naponi

$$\underline{E}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2$$
$$\underline{E}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3$$
$$\underline{E}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1$$
$$E_L = |\underline{E}_{12}| = |\underline{E}_{23}| = |\underline{E}_{31}|$$

- I fazni i linijski naponi čine simetričan trofazni sustav.

VIŠEFAZNE STRUJE
Zvijezda spoj izvora i trošila



Fazorski prikaz trofaznog simetričnog sustava napona

VIŠEFAZNE STRUJE
Zvijezda spoj izvora i trošila

- Elektromotorna sila $\boldsymbol{E}_f$ je fazni napon generatora.

napon generatora
napon na trošilu

Linijski naponi

$$E_{12} = \sqrt{3}\,E_f = \sqrt{3}\,U_f = E_L = U_L$$
$$E_{23} = \sqrt{3}\,E_f = \sqrt{3}\,U_f = E_L = U_L$$
$$E_{31} = \sqrt{3}\,E_f = \sqrt{3}\,U_f = E_L = U_L$$

- Fazni napon na trošilu $\boldsymbol{U}_f$ je jednak $\boldsymbol{E}_f$ - ako zanemarimo impedanciju voda!

VIŠEFAZNE STRUJE
Zvijezda spoj izvora i trošila

Fazne struje

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_1}{Z} e^{-j\varphi_1}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$
$$I_f = |\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3|$$

- Linijske struje $\boldsymbol{I}_L$ su ujedno i fazne struje $\boldsymbol{I}_f$ - spoj zvijezda.

Linijske struje

$$I_1 = I_f = I_L$$
$$I_2 = I_f = I_L$$
$$I_3 = I_f = I_L$$

VIŠEFAZNE STRUJE
Zvijezda spoj izvora i trošila

- Snaga simetričnog trofaznog sustava izvora u zvijezda spoju jednaka je sumi snaga pojedinih izvora:

$$P_i = E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 + E_3 I_3 \cos\varphi_3 = \\ = 3 E_f I_f \cos\varphi$$

- Ukupna snaga izvora se troši na trošilima:

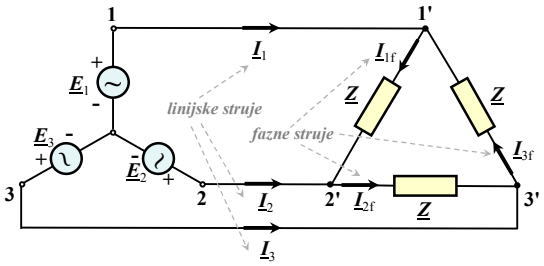
$$P_T = P_i = P$$

- Snaga na trošilima iznosi:

$$P_T = 3 U_f I_f \cos\varphi = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi$$

VIŠEFAZNE STRUJE

➢ **Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila**

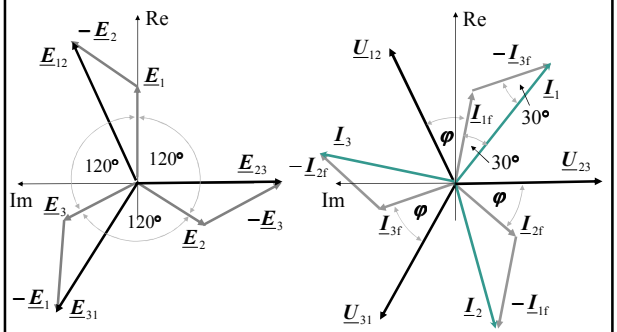


- Suma linijskih struja mora biti jednaka nuli:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

VIŠEFAZNE STRUJE

Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila



Fazorski prikaz trofaznog simetričnog sustava napona u zvijezda spoju

Fazorski prikaz sustava struja kroz trošilo u trokut spoju

VIŠEFAZNE STRUJE

Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila

Naponi na trošilu

$$\underline{U}_{12} = \underline{E}_{12}$$
$$\underline{U}_{23} = \underline{E}_{23}$$
$$\underline{U}_{31} = \underline{E}_{31}$$

Fazne struje

$$\underline{I}_{1f} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}$$
$$\underline{I}_{2f} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}}$$
$$\underline{I}_{3f} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}}$$

Linijske struje

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1f} - \underline{I}_{3f}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2f} - \underline{I}_{1f}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{3f} - \underline{I}_{2f}$$

I fazne i linijske struje čine simetrične trofazne sustave struja.

VIŠEFAZNE STRUJE

Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila

Dokaz

Fazne struje

$$\underline{I}_{1f} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = I_{1f} e^{j\varphi}$$

$$\underline{I}_{2f} = \frac{\underline{E}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_{12} e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{1f} e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_{3f} = \frac{\underline{E}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_{12} e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{1f} e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

Linijske struje

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1f} - \underline{I}_{3f} = \underline{I}_{1f}\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) = \underline{I}_L$$

Simetrični sustav struja

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2f} - \underline{I}_{1f} = \underline{I}_{1f}\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = \underline{I}_{1f}\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{I}_L e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{3f} - \underline{I}_{2f} = \underline{I}_{1f}\left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = \underline{I}_{1f}\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{I}_L e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

VIŠEFAZNE STRUJE

Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila

Odnos faznih i linijskih vrijednosti struja

$$I_1 = I_{1f}\left|\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right|$$

$$I_L = I_f\left|\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right|$$

$$1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 1 - \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$I_L = \sqrt{3}\, I_f$$

VIŠEFAZNE STRUJE

Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila

Snaga trošila spojenih u trokut

$$P = U_{12}\, I_{1f} \cos\varphi_1 +$$
$$+ U_{23}\, I_{2f} \cos\varphi_2 +$$
$$+ U_{31}\, I_{3f} \cos\varphi_3 =$$
$$= 3\, U_f\, I_f \cos\varphi \;\; = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos\varphi$$

$U_f = U_L$ $\qquad$ $I_f = \dfrac{I_L}{\sqrt{3}}$

Snaga simetričnog trošila - bez obzira na spoj trošila:

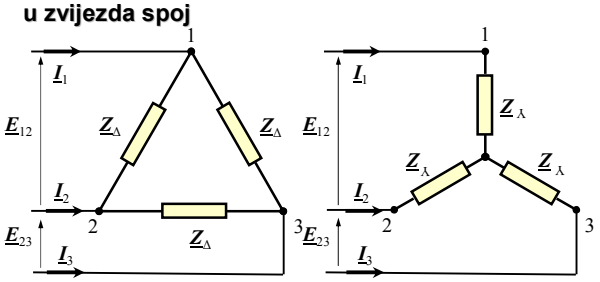
$$P = 3\, U_f\, I_f \cos\varphi = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos\varphi$$

TROFAZNI SUSTAV

Pretvaranje zvijezda spoja impedancija u trokut spoj i obratno

TROFAZNI SUSTAV

- **Pretvorba simetričnog trokut spoja impedancija u zvijezda spoj**



- Linijske struje moraju ostati nepromijenjene - po iznosu i po fazi.

TROFAZNI SUSTAV

Linijske struje

$\underline{I}_{1\Delta} = \underline{I}_{1\curlywedge} = \underline{I}_1$

$\underline{I}_{2\Delta} = \underline{I}_{2\curlywedge} = \underline{I}_2$

$\underline{I}_{3\Delta} = \underline{I}_{3\curlywedge} = \underline{I}_3$

u spoju zvijezda

u spoju trokut

fazni naponi u spoju trokut

Naponi na impedancijama su fazni naponi!

- Zbog simetrije možemo promatrati samo jednu fazu.

$$\underline{I}_{1\Delta} = \frac{\underline{E}_{12}}{\underline{Z}_\Delta} - \frac{\underline{E}_{31}}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{1}{\underline{Z}_\Delta}\left(\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}\right)$$

$$\underline{I}_{1\curlywedge} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_\curlywedge}$$

fazni napon u spoju zvijezda

TROFAZNI SUSTAV

$$\underline{I}_{1\Delta} = \frac{1}{\underline{Z}_\Delta}\left(\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}\right)$$

fazni naponi

$$\underline{I}_{1\curlywedge} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_\curlywedge}$$

fazni napon

Linijske struje moraju ostati jednake! $\quad \underline{I}_{1\Delta} = \underline{I}_{1\curlywedge} = \underline{I}_1$

$$\frac{\underline{I}_{1\Delta}}{\underline{I}_{1\curlywedge}} = 1 = \frac{\underline{Z}_\curlywedge}{\underline{Z}_\Delta} \cdot \frac{\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}}{\underline{E}_1}$$

$$\frac{\underline{Z}_\curlywedge}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}}$$

TROFAZNI SUSTAV

Fazni napon - općenito $\quad \underline{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_{e1}}$

Linijski naponi u spoju zvijezda

$$\underline{E}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{E}_1\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$\underline{E}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 = \underline{E}_1\left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - 1\right)$$

Razlika napona

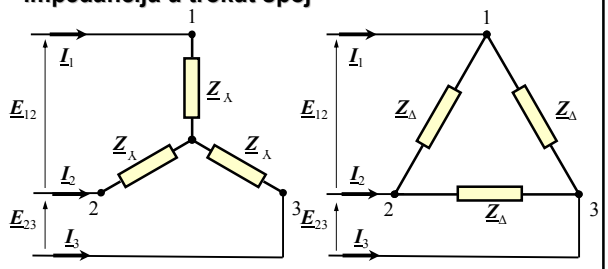
$$\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31} = \underline{E}_1\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 1\right) = \underline{E}_1\left(2 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\underline{E}_1$$

Omjer impedancija

$$\frac{\underline{Z}_\curlywedge}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}} = \frac{\underline{E}_1}{3\underline{E}_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{Z}_\curlywedge = \frac{1}{3}\underline{Z}_\Delta$$

TROFAZNI SUSTAV

➢ Pretvorba simetričnog zvijezda spoja impedancija u trokut spoj

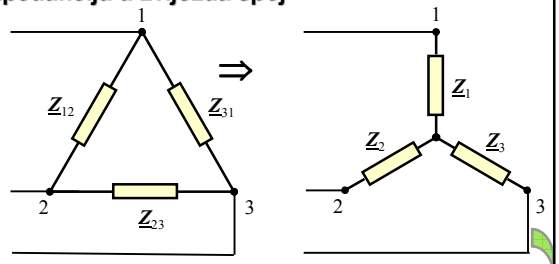


Linijske struje moraju ostati jednake!

Omjer impedancija $\frac{\underline{Z}_Y}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_{12} - \underline{E}_{31}} = \frac{\underline{E}_1}{3\underline{E}_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_Y$

TROFAZNI SUSTAV

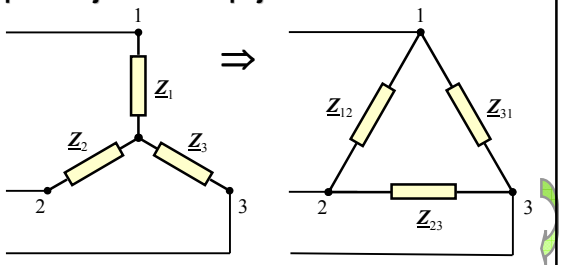
➢ Pretvorba nesimetričnog trokut spoja impedancija u zvijezda spoj



$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \qquad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \qquad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

TROFAZNI SUSTAV

➢ Pretvorba nesimetričnog zvijezda spoja impedancija u trokut spoj



$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

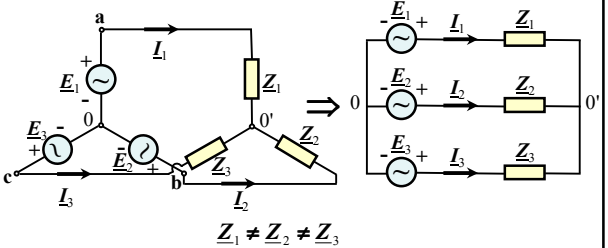
$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}$$

TROFAZNI SUSTAV

Nesimetričan trofazni sustav

TROFAZNI SUSTAV — Nesimetričan trofazni sustav

➢ Zvijezda spoj izvora i trošila



$$\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$$

- Postupak:
  - pretvorimo nekoliko paralelnih grana s izvorima u jednu granu,
  - odredimo napon $\underline{U}_{0'0}$.

NESIMETIČAN TROFAZNI SUSTAV

Zvijezda spoj izvora i trošila

Fazni naponi $\underline{E}_1 = E_1 e^{-j0}$

$$\underline{E}_2 \neq \underline{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{E}_3 \neq \underline{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

Nesimetrični sustav napona

Napon grane

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{E} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Naponske jednadžbe — *Struje u granama*

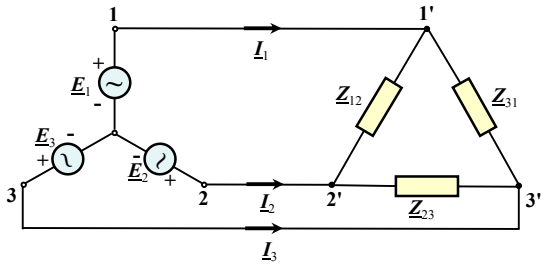
$$\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{U}_{0'0} \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{E}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{U}_{0'0} \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{E}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{U}_{0'0} \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_2}$$

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

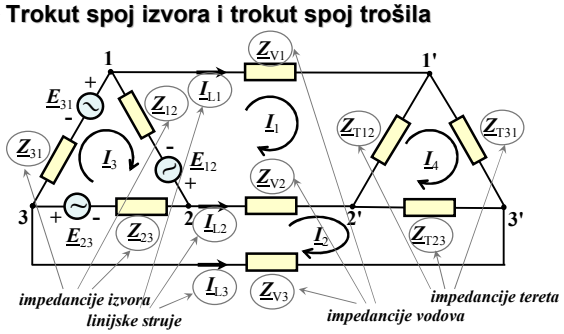
➢ Zvijezda spoj izvora i trokut spoj trošila



Prvo treba pretvoriti trokut spoj impedancija u ekvivalentni zvijezda spoj i onda rješavati kao zvijezda spoj izvora i trošila!

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

➢ Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila



- Kod Δ spoja izvora moraju biti zadani i unutarnji otpori – inače bi trokutom tekla beskonačna struja!
- Problem ćemo riješiti metodom konturnih struja.

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila

Linijske struje:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_{L3} = -\underline{I}_2$$

Jednadžbe konturnih struja:

$$\underline{I}_1(\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{V1}+\underline{Z}_{V2}+\underline{Z}_{T12}) - \underline{I}_2\underline{Z}_{V2} - \underline{I}_3\underline{Z}_{12} - \underline{I}_4\underline{Z}_{T12} = -\underline{E}_{12}$$

$$-\underline{I}_1\underline{Z}_{V2} + \underline{I}_2(\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{V2}+\underline{Z}_{V3}+\underline{Z}_{T23}) - \underline{I}_3\underline{Z}_{23} - \underline{I}_4\underline{Z}_{T23} = -\underline{E}_{23}$$

$$-\underline{I}_1\underline{Z}_{12} - \underline{I}_2\underline{Z}_{23} + \underline{I}_3(\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}) - \underline{I}_4 \cdot 0 = \underline{E}_{12}+\underline{E}_{23}+\underline{E}_{31}$$

$$-\underline{I}_1\underline{Z}_{T12} - \underline{I}_2\underline{Z}_{T23} - \underline{I}_3 \cdot 0 + \underline{I}_4(\underline{Z}_{T12}+\underline{Z}_{T23}+\underline{Z}_{T31}) = 0$$

Sređeno:

$$\underline{I}_1\underline{A}_{11} + \underline{I}_2\underline{A}_{12} + \underline{I}_3\underline{A}_{13} + \underline{I}_4\underline{A}_{14} = \underline{E}_{A1}$$

$$\underline{I}_1\underline{A}_{21} + \underline{I}_2\underline{A}_{22} + \underline{I}_3\underline{A}_{23} + \underline{I}_4\underline{A}_{24} = \underline{E}_{A2}$$

$$\underline{I}_1\underline{A}_{31} + \underline{I}_2\underline{A}_{32} + \underline{I}_3\underline{A}_{33} + \underline{I}_4\underline{A}_{34} = \underline{E}_{A3}$$

$$\underline{I}_1\underline{A}_{41} + \underline{I}_2\underline{A}_{42} + \underline{I}_3\underline{A}_{43} + \underline{I}_4\underline{A}_{44} = \underline{E}_{A4}$$

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila

- Uvedene oznake:

I kontura ...

$\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{V1}+\underline{Z}_{V2}+\underline{Z}_{T12}$ - *suma svih impedancija unutar konture* ***I***

$\underline{A}_{12} = -\underline{Z}_{V2}$ - *međašnja impedancija između kontura* ***I*** *i* ***II***

$\underline{A}_{13} = -\underline{Z}_{12}$ - *međašnja impedancija između kontura* ***I*** *i* ***III***

$\underline{A}_{14} = -\underline{Z}_{T12}$ - *međašnja impedancija između kontura* ***I*** *i* ***IV***

II kontura ...

$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{12} = -\underline{Z}_{V2}$

$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{V2}+\underline{Z}_{V3}+\underline{Z}_{T23}$

$\underline{A}_{23} = -\underline{Z}_{23}$

$\underline{A}_{24} = -\underline{Z}_{T23}$

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila

III kontura ...

$\underline{A}_{31} = -\underline{Z}_{12}$

$\underline{A}_{32} = \underline{A}_{23} = -\underline{Z}_{23}$

$\underline{A}_{33} = \underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}$

$\underline{A}_{34} = 0$

IV kontura ...

$\underline{A}_{41} = \underline{A}_{14} = -\underline{Z}_{T12}$

$\underline{A}_{42} = \underline{A}_{24} = -\underline{Z}_{T23}$

$\underline{A}_{43} = \underline{A}_{34} = 0$

$\underline{A}_{44} = \underline{Z}_{T12}+\underline{Z}_{T23}+\underline{Z}_{T31}$

desna strana sustava...

$\underline{E}_{A1} = -\underline{E}_{12}$

$\underline{E}_{A2} = -\underline{E}_{23}$

$\underline{E}_{A3} = \underline{E}_{12}+\underline{E}_{23}+\underline{E}_{31}$

$\underline{E}_{A4} = 0$

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila

Matrična jednadžba

$$\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{E}}_A$$

Matrica sustava ***Vektor nepoznanica*** ***Desna strana sustava***

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} & \underline{A}_{14} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} & \underline{A}_{24} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} & \underline{A}_{34} \\ \underline{A}_{41} & \underline{A}_{42} & \underline{A}_{43} & \underline{A}_{44} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{E}}_A = \begin{bmatrix} \underline{E}_{A1} \\ \underline{E}_{A2} \\ \underline{E}_{A3} \\ \underline{E}_{A4} \end{bmatrix}$$

NESIMETRIČAN TROFAZNI SUSTAV

Trokut spoj izvora i trokut spoj trošila

Svaku struju možemo odrediti rješavanjem determinanti.

Primjer:

$$\underline{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{E}_{A1} & \underline{A}_{14} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{E}_{A2} & \underline{A}_{24} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{E}_{A3} & \underline{A}_{34} \\ \underline{A}_{41} & \underline{A}_{42} & \underline{E}_{A4} & \underline{A}_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} & \underline{A}_{14} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} & \underline{A}_{24} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} & \underline{A}_{34} \\ \underline{A}_{41} & \underline{A}_{42} & \underline{A}_{43} & \underline{A}_{44} \end{vmatrix}}$$

desna strana sustava

determinanta matrice sustava

Induktiviteti

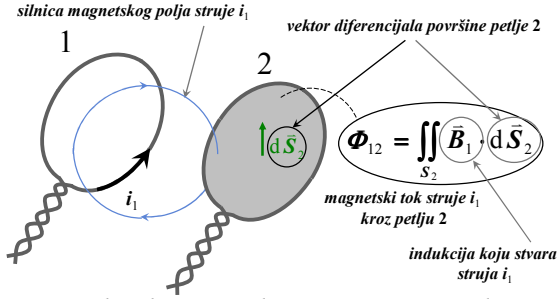
INDUKTIVITETI

Samoinduktiviteti i međuinduktiviteti

INDUKTIVITETI

silnica magnetskog polja struje i_1

vektor diferencijala površine petlje **2**



magnetski tok struje i_1 kroz petlju **2**

indukcija koju stvara struja i_1

Pretpostavka: dimenzije vodiča su zanemarive u odnosu na dimenzije petlje i permeabilnost je konstantna!

broj zavoja petlje **2**

međuinduktivitet M

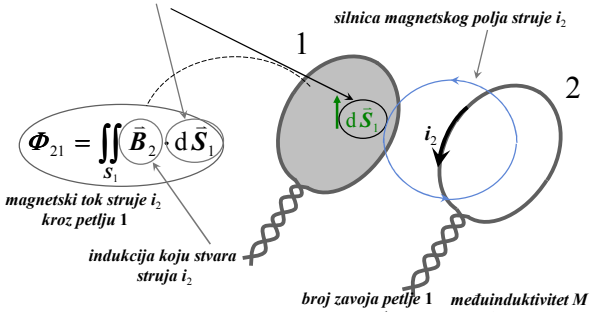
Ulančani magnetski tok struje i_1 kroz petlju **2**

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} \approx L_{12} i_1$$

INDUKTIVITETI

vektor diferencijala površine petlje **1**

silnica magnetskog polja struje i_2



magnetski tok struje i_2 kroz petlju **1**

indukcija koju stvara struja i_2

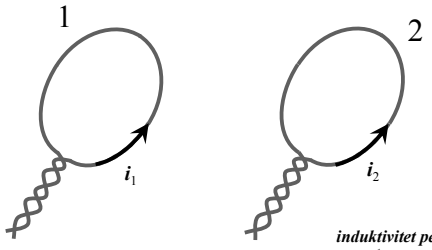
broj zavoja petlje **1**

međuinduktivitet M

Ulančani magnetski tok struje i_2 kroz petlju **1**

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} \approx L_{21} i_2$$

INDUKTIVITETI



induktivitet petlje **1**

Ulančani magnetski tok struje i_1 kroz vlastitu petlju **1**

$$\Psi_{11} = L_1 i_1$$

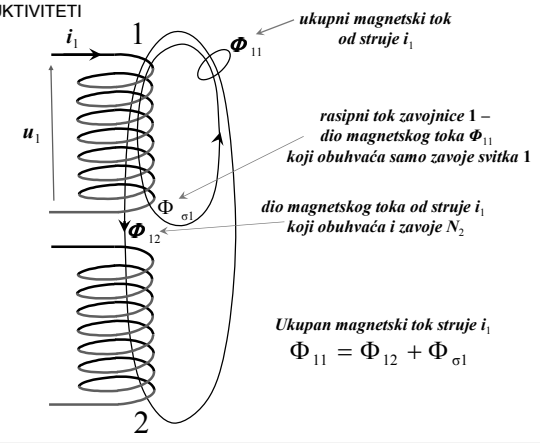
induktivitet petlje **2**

Ulančani magnetski tok struje i_2 kroz vlastitu petlju **2**

$$\Psi_{22} = L_2 i_2$$

Sve navedeno vrijedi za bilo koje oblike petlji!

INDUKTIVITETI



ukupni magnetski tok od struje i_1

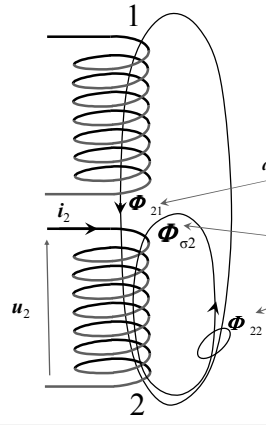
rasipni tok zavojnice **1** *–*
dio magnetskog toka Φ_{11}
koji obuhvaća samo zavoje svitka **1**

dio magnetskog toka od struje i_1
koji obuhvaća i zavoje N_2

Ukupan magnetski tok struje i_1

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{\sigma 1}$$

INDUKTIVITETI



Ukupni magnetski tok struje i_2

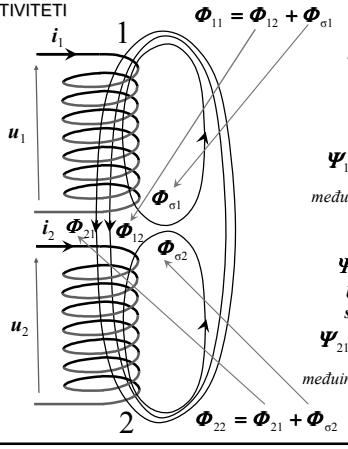
$$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{\sigma 2}$$

dio magnetskog toka od struje i_2
koji obuhvaća i zavoje N_1

rasipni tok zavojnice **2** *–*
dio magnetskog toka Φ_{22}
koji obuhvaća samo zavoje svitka **2**

ukupni magnetski tok od struje i_2

INDUKTIVITETI



$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{\sigma 1}$

Ulančani magnetski tok struje i_1 *kroz zavojnicu* **1**

$$\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11} = L_1 i_1$$

Ulančani magnetski tok struje i_1 *kroz zavojnicu* **2**

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = M_{12} i_1$$

međuinduktivitet zavojnica 1 *i* 2

Ulančani magnetski tok struje i_2 *kroz zavojnicu* **2**

$$\Psi_{22} = N_2 \Phi_{22} = L_2 i_2$$

Ulančani magnetski tok struje i_2 *kroz zavojnicu* **1**

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = M_{21} i_2$$

međuinduktivitet zavojnica 2 *i* 1

$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{\sigma 2}$

Međuinduktivitet

$$M_{12} = M_{21} = M$$

INDUKTIVITETI

Ukupni ulančani tokovi kroz promatrane krugove

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{12} = L_2 i_2 + M i_1$$

Uz jednake struje i_1 *i* i_2 *jasno se vidi da je:*

$$\left.\begin{array}{l} |\Psi_{11}| > |\Psi_{21}| \\ |\Psi_{22}| > |\Psi_{12}| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 > M \\ L_2 > M \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 > M^2$$

Koeficijent magnetske veze

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} < 1$$

INDUKTIVITETI

Ukupni ulančani tokovi kroz promatrane krugove

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad / \cdot \frac{1}{2} i_1$$

$$\Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad / \cdot \frac{1}{2} i_2$$

$$+$$

$$\frac{1}{2}\Psi_1 i_1 + \frac{1}{2}\Psi_2 i_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

magnetska energija zbog struje i_1 *u zavojnici* **1**

magnetska energija zbog struje i_2 *u zavojnici* **2**

međusobna magnetska energija **1.** *i* **2.** *kruga (može biti i negativna kad su* Ψ_{12} *i* Ψ_{22} *suprotni)*

Općenito za n-strujnih krugova vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Psi_k i_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} L_{ik} i_k i_i$$

$$za\ i = k\ L_{ik} = L_i$$

$$za\ i \neq k\ L_{ik} = M_{ik}$$

INDUKTIVITETI

Rasipni induktiviteti

INDUKTIVITETI

Ukupni magnetski tok struje i_1

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{\sigma 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\sigma 1} = \Phi_{11} - \Phi_{12}$$

Rasipnim magnetskim tokovima pripadaju odgovarajući rasipni induktiviteti.

Ulančani rasipni magnetski tok struje i_1

$$\Psi_{\sigma 1} = N_1 \Phi_{\sigma 1} = L_{\sigma 1}\, i_1$$

Rasipni induktivitet zavojnice **1**

$$L_{\sigma 1} = \frac{N_1 \Phi_{\sigma 1}}{i_1} = \frac{N_1}{i_1}\left(\Phi_{11} - \Phi_{12}\right) = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} - \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_1}$$

$$L_{\sigma 1} = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M$$

INDUKTIVITETI

Ukupni magnetski tok struje i_2

$$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{\sigma 2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\sigma 2} = \Phi_{22} - \Phi_{21}$$

Ulančani rasipni magnetski tok struje i_2

$$\Psi_{\sigma 2} = N_2 \Phi_{\sigma 2} = L_{\sigma 2}\, i_2$$

Rasipni induktivitet zavojnice **2**

$$L_{\sigma 2} = \frac{N_2 \Phi_{\sigma 2}}{i_2} = \frac{N_2}{i_2}\left(\Phi_{22} - \Phi_{21}\right) = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2} - \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_2}$$

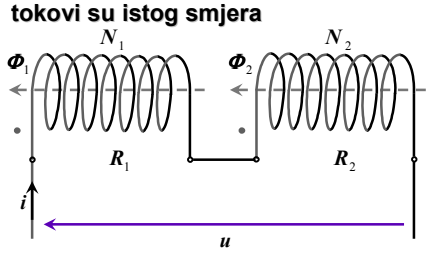
$$L_{\sigma 2} = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M$$

INDUKTIVITETI

Ukupni induktivitet međusobno vezanih svitaka

INDUKTIVITETI

- **Serijski spoj magnetski povezanih svitaka – tokovi su istog smjera**



Naponska jednadžba:

$$u = i\left(R_1 + R_2\right) + \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}$$

INDUKTIVITETI

Serijski spoj svitaka – tokovi su istog smjera

$$\Psi_1 = L_1 i + M i \qquad \Psi_2 = M i + L_2 i$$

$$u = i\left(R_1 + R_2\right) + \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}$$

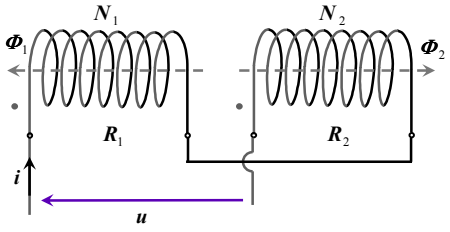
$$u = i\left(R_1 + R_2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(L_1 + 2M + L_2\right) i\right]$$

Ukupni (rezultantni) induktivitet

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

INDUKTIVITETI

- **Serijski spoj magnetski povezanih svitaka – tokovi su suprotnog smjera**



Naponska jednadžba:

$$u = i\left(R_1 + R_2\right) + \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}$$

INDUKTIVITETI

Serijski spoj svitaka – tokovi su suprotnog smjera