

Serijski spoj impedancija:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dots + \underline{Z}_n = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i \quad [\Omega]$$

Paralalni spoj impedancija:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \quad [\Omega]$$

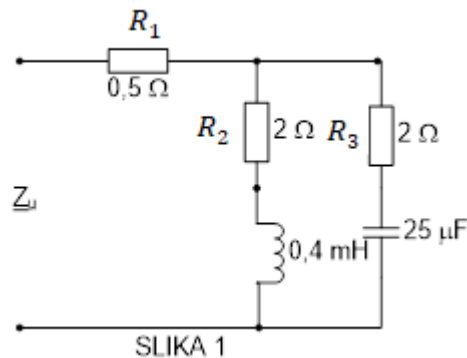
Serijski spoj admitancija:

$$\frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_3} + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Y}_i} \quad [S]$$

Paralelni spoj admitancija:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots + \underline{Y}_n = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i \quad [S]$$

AV_4-Z_1 (Kuzmanović 6.1., str.170): Treba odrediti ulaznu impedanciju \underline{Z}_u u shemi na SLICI 1, ako je $\omega=5000$ rad/s.



Zadani podatci su:

$$\omega = 5000 \text{ rad/s} ; R_1 = 0.5 \Omega ; R_2 = R_3 = 2 \Omega ; L = 0.4 \text{ mH} ; C = 25 \mu\text{F}$$

Na temelju iznosa induktiviteta, kapaciteta i kružne frekvencije izračunaju se pripadne reaktancije X_L i X_C .

$$X_L = \omega L = 2 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 8 \Omega$$

Prva paralelna grana se sastoji od serijskog $R_2 L$ spoja, te će pripadna impedancija (admitancija) imati oznaku \underline{Z}_2 (\underline{Y}_2), dok se druga paralelna grana sastoji od serijske $R_3 L$ kombinacija, te je oznaka pripadne impedancije (admitancija) \underline{Z}_3 (\underline{Y}_3).

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_L = 2 + j2 \Omega = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega = 2.83 \angle 45^\circ \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_C = 2 - j8 = 8.25 \angle -75.96^\circ \Omega$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0.35 \angle -45^\circ \text{ S} = 0.25 - j0.25 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.12 \angle 75.96^\circ \text{ S} = 0.029 - j0.0118 \text{ S}$$

Kako se radi o paralelnom spoju dvije grane u seriji s otporom R_1 , prvo će se odrediti ukupna admitancija (impedancija) paralelnih grana \underline{Y}_{23} (\underline{Z}_{23}).

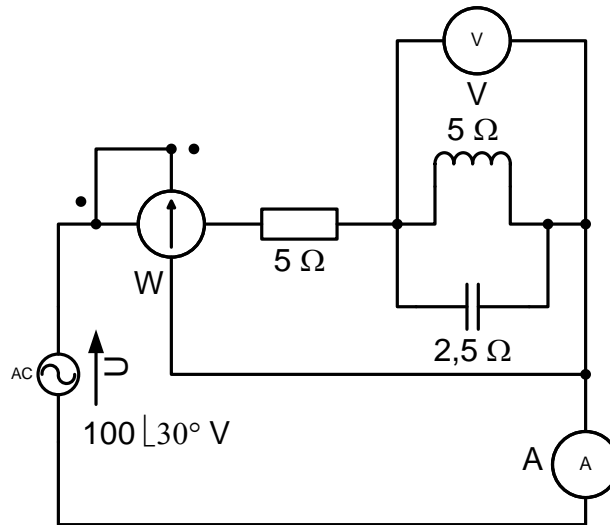
$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0.28 - j0.13 \text{ S} = 0.31 \angle -25.34^\circ \text{ S}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{1}{\underline{Y}_{23}} = 3.24 \angle 25.34^\circ \Omega = 2.9 + j1.38 \Omega$$

Ulazna impedancija \underline{Z}_u određena je serijskim spojem otpora R_1 i nadomjesne impedancije \underline{Z}_{23} .

$$\underline{Z}_u = R_1 + \underline{Z}_{23} = 3.4 + j1.38 \Omega = 3.69 \angle 22.02^\circ \Omega$$

AV_4-Z_2 (Kuzmanović 6.7., str.171): Koje vrijednosti pokazuju instrumenti na SLICI 2?



SLIKA 2

Zadani podatci su:

$$\underline{U} = 100\angle 30^\circ V ; R = 5 \Omega ; X_L = 5 \Omega ; X_C = 2.5 \Omega$$

Pretpostavljamo da su instrumenti idealni:

1. Unutrašnji otpor ampermetra nula, tj. pad napona na ampermetru je nula
2. Unutrašnji otpor voltmetra beskonačan, tj. struja u grani voltmetra je nula.
3. Za strujnu granu vatmetra (vodoravne stezaljke kod simbola vatmetra) vrijedi isto kao za idealni ampermetar, dok za naponsku granu vatmetra (vertikalne stezaljke kod simbola vatmetra) vrijedi isto kao za idealni voltmetar

Prema zadanoj shemi ampermetar mjeri modul fazora struje izvora $I = |\underline{I}|$ koju možemo izračunati iz poznate vrijednosti napona izvora te ukupne nadomjesne impedancije \underline{Z}_{uk} .

$$\underline{Z}_{uk} = R + \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = R - j \frac{X_L X_C}{X_L - X_C} = 5 - j5 \Omega = 7.07\angle -45^\circ \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{uk}} = 14.14\angle 75^\circ A$$

Struja ampermetra I_A je:

$$I_A = I = 14.14 A$$

Na temelju zadane sheme vidi se da je voltmetar spojen na paralelnu kombinaciju reaktancija X_L i X_C , koju možemo nadomjestiti s impedancijom \underline{Z}_{LC} koja je serijski spojena s otporom R i naponskim izvorom \underline{U} . Pokazivanje voltmetra U_V je jednako modulu fazora napona \underline{U}_{LC} na nadomjesnoj impedanciji \underline{Z}_{LC} . Kako je nadomjesna impedancija \underline{Z}_{LC} spojena serijski s izvorom zaključuje se kako njome prolazi prethodno izračunata struja izvora \underline{I} .

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = -j \frac{X_L X_C}{X_L - X_C} = -j5 \Omega = 5\angle -90^\circ \Omega$$

$$\underline{U}_{LC} = \underline{Z}_{LC} \underline{I} = 70.71\angle -15^\circ V$$

$$U_V = |\underline{U}_{LC}| = U_{LC} = 70.71 V$$

Na temelju zadane sheme vidi se da strujnom granom vatmetra \underline{I}_W prolazi struja izvora \underline{I} jer struja izvora ulazi u (crnu) točku naznačenoj na strujnoj grani vatmetra, kada bi relativni odnos (crne) točke na strujnoj grani vatmetra i referentnog smjera struje bio suprotan tada bi utjecaj na strujnu granu imala struja suprotnog predznaka, tj. $-\underline{I}$.

$$\underline{I}_W = \underline{I}$$

Također se na temelju slike može vidjeti kako je napon naponske grane vatmetra \underline{U}_W jednak naponu izvora \underline{U} , jer je (crna) točka na naponskoj grani spojena na vrh strelice referentnog smjera naponskog izvora, ako bi relativni donos referentnog smjera napona i (crne) točke naponske grane bio suprotan tada bi utjecaj na naponsku granu imao napon suprotnog predznaka, tj. $-\underline{U}$.

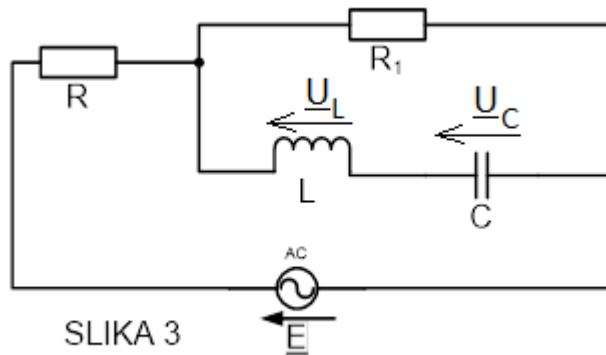
$$\underline{U}_W = \underline{U}$$

Vatmetar mjeri djelatnu snagu P_W određenu izrazom:

$$\begin{aligned} P_W &= \operatorname{Re}\{\underline{U}_W \underline{I}_W^*\} = \operatorname{Re}\{\underline{U} \underline{I}^*\} = \operatorname{Re}\{(100 \angle 30^\circ) (14.14 \angle 75^\circ)^*\} \\ &= \operatorname{Re}\{(100 \angle 30^\circ) (14.14 \angle -75^\circ)\} = \operatorname{Re}\{1414 \angle -45^\circ\} \\ &= \operatorname{Re}\{1000 - j1000\} = 1000 \text{ W} \end{aligned}$$

Snaga koju je izmjerio vatmetar P_W jednaka je djelatnoj snazi izvora jer je napon naponske grane vatmetra jednak naponu izvora, dok je struja strujne grane vatmetra jednaka struji izvora.

AV_4-Z_3 (Kuzmanović 6.20., str.173): U mreži na SLICI 3 treba odrediti: otpor R , napone \underline{U}_L i \underline{U}_C , ako je zadano: $\underline{E} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{I} = I \angle -18^\circ \text{ A}$, $\omega = 400 \text{ rad/s}$, $R_1 = 30 \ \Omega$, $L = 225 \text{ mH}$, $C = 50 \ \mu\text{F}$.



Zadani podatci su:

$$\underline{E} = 100 \angle 0^\circ \text{ V} ; \alpha_I = -18^\circ , \omega = 400 \text{ rad/s} , R_1 = 30 \ \Omega , L = 225 \text{ mH} ; C = 50 \ \mu\text{F}$$

Na temelju iznosa induktiviteta, kapaciteta i kružne frekvencije izračunaju se pripadne reaktancije X_L i X_C .

$$X_L = \omega L = 90 \ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 50 \ \Omega$$

Ukupna impedancija \underline{Z}_{uk} sa stezaljki izvora se sastoji od serijskog spoja otpora R i nadomjesne impedancije \underline{Z}_1 . Nadomjesna impedancija \underline{Z}_1 određena je paralelnim spojem otpora R_1 sa serijskom kombinacijom reaktancija X_L i X_C . Uvrštavanjem poznatih vrijednosti slijedi:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1(jX_L - jX_C)}{R_1 + jX_L - jX_C} = 19.2 + j14.4 \ \Omega = 24 \angle 36.97^\circ \ \Omega$$

$$\underline{Z}_{uk} = R + \underline{Z}_1 = R + 19.2 + j14.4 \ \Omega$$

Kut φ impedancije \underline{Z}_{uk} određen je izrazom:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{\underline{Z}_{uk}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}_{uk}\}} = \tan^{-1} \frac{14.4}{R + 19.2}$$

Ukupna impedancija \underline{Z}_{uk} može se izraziti i na drugačiji način, tj. preko fazora napona \underline{E} i struje \underline{I} izvora. Iz ovog zapisa moguće je odrediti fazu φ ukupne impedancije \underline{Z}_{uk} .

$$\underline{Z}_{uk} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{I \angle -18^\circ} = \frac{100}{I} \angle 18^\circ \ \Omega$$

$$\varphi = 18^\circ$$

Na temelju poznatog kuta φ je moguće odrediti otpor R na temelju izraza:

$$18^\circ = \tan^{-1} \frac{14.4}{R + 19.2}$$

Preuređivanjem izraza slijedi:

$$R = \frac{14.4}{\tan 18^\circ} - 19.2 = 25.12 \ \Omega$$

Nakon izračuna otpora R moguće je izračunati ukupnu impedanciju \underline{Z}_{uk} .

$$\underline{Z}_{uk} = R + 19.2 + j14.4 \ \Omega = 44.32 + j14.4 \ \Omega = 46.6 \angle 18^\circ \ \Omega$$

Također je moguće odrediti struju izvora

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{uk}} = 2.15 \angle -18^\circ \text{ A}$$

Kako je nadomjesna impedancija \underline{Z}_1 serijski spojena s otporom R te naponskim izvorom može se zaključiti da kroz sve protječe ista struja \underline{I} . Napon \underline{U}_1 na nadomjesnoj impedanciji \underline{Z}_1 može se izračunati prema:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = 51.5 \angle 18.87^\circ \text{ V}$$

Napon \underline{U}_1 je ujedno napon na paralelnom spoju otpora R_1 sa serijskom kombinacijom reaktancija X_L i X_C . Odnosno struju \underline{I}_{LC} kroz serijski spoj reaktancija X_L i X_C moguće je odrediti prema:

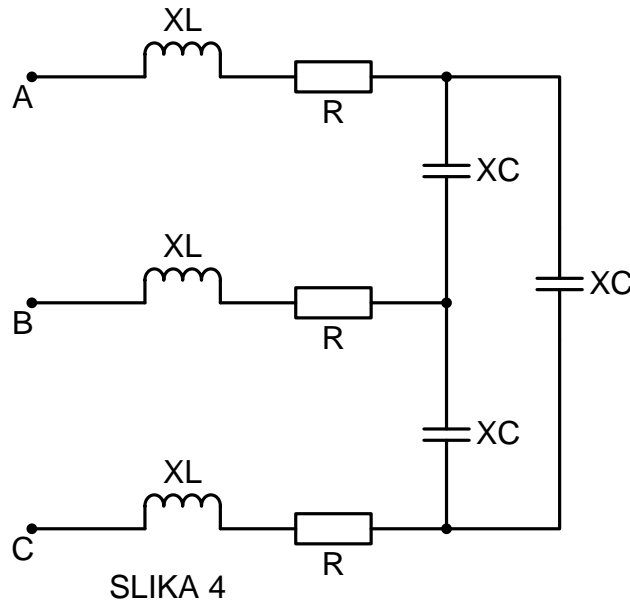
$$\underline{I}_{LC} = \frac{\underline{U}_1}{jX_L - jX_C} = 1.29 \angle -71.13^\circ \text{ A}$$

Budući da kroz obje reaktancije X_L i X_C prolazi ista struja \underline{I}_{LC} naponi \underline{U}_L i \underline{U}_C računaju se prema:

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I}_{LC} = 116.1 \angle 18.87^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I}_{LC} = 64.5 \angle -161.13^\circ \text{ V}$$

AV_4-Z_4 (Felja 5.9., str.71): U mreži na SLICI 4 zadano je $X_L = 9 \Omega$ i $R = 3 \Omega$. Nađite X_C tako da ulazna impedancija mreže gledana s bilo kojih stezaljki bude radni otpor.



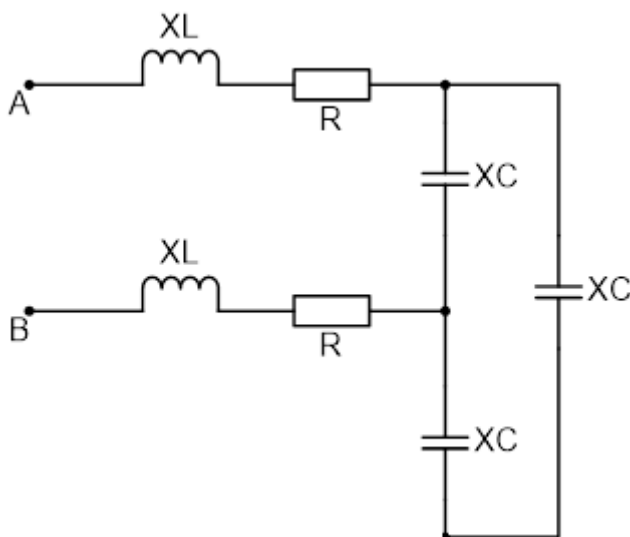
Zadani podatci su:

$$X_L = 9 \Omega ; R = 3 \Omega$$

Kako su sve induktivne reaktancije X_L međusobno jednake, svi otpori R međusobno jednaki te sve kapacitivne reaktancije X_C međusobno jednake ulazna impedancija je jednaka ako se promatra s bilo koje dvije stezaljke od tri navedene (A, B, C). Odnosno vrijedi:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{AC}$$

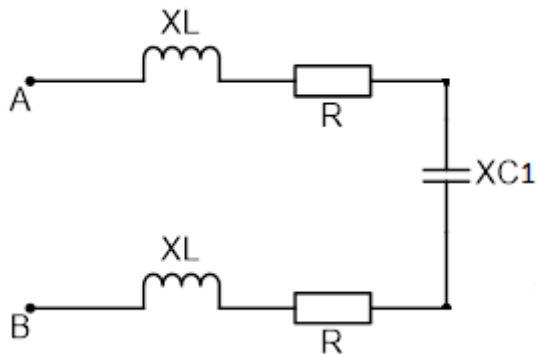
Bez smanjenja općenitosti zadatka možemo odabrati da je ulazna impedancija \underline{Z}_u jednaka \underline{Z}_{AB} . U tome slučaju granu mreže koja se sastoji od induktivne reaktancije X_L i otpora R te sadrži točku C možemo zanemariti. U tome slučaju nadomjesna mreža je:



Iz nadomjesne mreže je potrebno uočiti da su dvije (doljnja i desna) kapacitivne reaktancije spojene u seriju, te paralelno s trećom (gornja). Nadomjesna kapacitivna reaktancija X_{C1} navedenog spoja je:

$$X_{C1} = \frac{X_C(X_C + X_C)}{3X_C} = \frac{2}{3}X_C$$

Nova nadomjesna shema je:



Ulazna impedancija \underline{Z}_{AB} je:

$$\underline{Z}_{AB} = 2R + j2X_L - jX_{C1} = 6 + j\left(18 - \frac{2}{3}X_C\right) \Omega$$

Uvjet za određivanje kapacitivne reaktancije X_C tako da ulazna impedancija gledana s bilo kojih stezaljki (u našem slučaju su A i B) bude radni otpor se može iskazati kao:

$$Im\{\underline{Z}_{AB}\} = 0$$

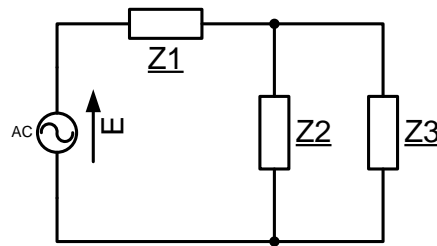
Uvrštavanjem izračunate vrijednosti \underline{Z}_{AB} u navedeni uvjet slijedi:

$$Im\left\{6 + j\left(18 - \frac{2}{3}X_C\right)\right\} = 0$$

$$18 - \frac{2}{3}X_C = 0$$

$$X_C = 27 \Omega$$

AV_4-Z_5 (Felja 5.12., str.72): Zadana je mreža (SLIKA 5) u kojoj je $E = 1 \text{ V}$, $Z_1 = 1 \Omega$, $Z_2 = j \Omega$ i $Z_3 = 1 - j \Omega$. Odredite struje u granama koristeći se zamjenom naponskog izvora ekvivalentnim strujnim izvorom.

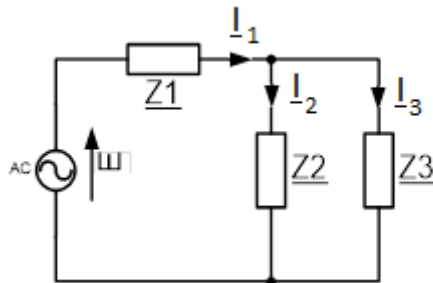


SLIKA 5

Zadani podatci su:

$$E = 1 \text{ V}; Z_1 = 1 \Omega; Z_2 = j \Omega; Z_3 = 1 - j \Omega$$

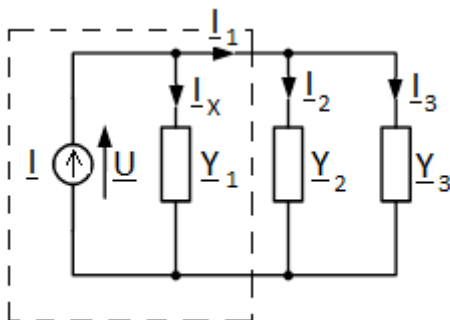
Neka su referentni smjerovi struja (I_1, I_2, I_3) kao na slici:



Kako u mreži nije zadan niti jedan napon te niti jedna struja u obliku fazora dozvoljeno je pretpostaviti proizvoljan kut za jedan od napona ili za jednu od struja. U našem slučaju najjednostavnije je pretpostaviti da je fazor napona izvora \underline{E} pod kutom nula.

$$\underline{E} = E \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Pretvorbom realnog naponskog izvora određenog naponom praznog hoda \underline{E} i unutrašnjim otporom Z_1 u realni strujni izvor određen strujom kratkog spoja \underline{I} i unutrašnjom admitancijom \underline{Y}_1 dobije se sljedeća nadomjesna shema:



$$\underline{I} = \frac{E}{Z_1} = 1 \text{ A}$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{Z_1} = 1 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = -j S$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ S = 0.5 + j0.5 S$$

Kako su tri grane s admitancijama \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 i \underline{Y}_3 spojene paralelno moguće ih je prikazati jednom nadomjesnom admitancijom \underline{Y} .

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 1.5 - j0.5 S = 1.58 \angle -18.43^\circ S$$

Napon strujnog izvora \underline{U} određen je strujom strujnog izvora \underline{I} te ukupnom admitancijom \underline{Y} .

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = 0.63 \angle 18.43^\circ V = 0.6 + j0.2 V$$

Napon strujnog izvora \underline{U} je ujedno i napon na sve tri admitancije \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 i \underline{Y}_3 , zato se struje \underline{I}_2 i \underline{I}_3 računaju prema:

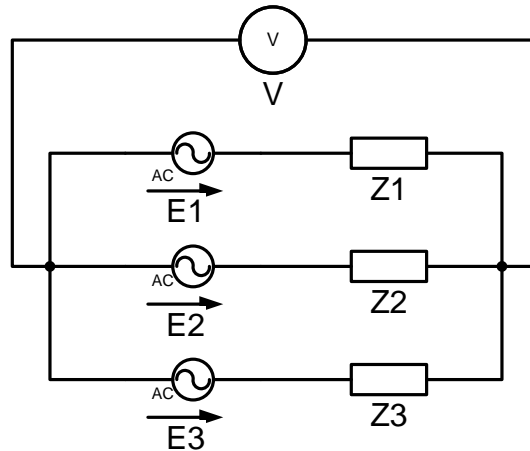
$$\underline{I}_2 = \underline{U} \underline{Y}_2 = 0.63 \angle -71.57^\circ A = 0.2 - j0.6 A$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U} \underline{Y}_3 = 0.45 \angle 63.43^\circ A = 0.2 + j0.4 A$$

Struju \underline{I}_1 moguće je izračunati na temelju KZS-a koji je izravna posljedica odabranih referentnih smjerova struja \underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3 .

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0.4 - j0.2 A = 0.45 \angle -26.57^\circ A$$

AV_4-Z_6 (Felja 5.30., str.77): Tri izvora sinusnih napona jednake frekvencije uključena su u mrežu prema SLICI 6. $E_1=E_2=E_3=100\text{ V}$, E_2 prethodi E_1 za 60° , E_3 zaostaje 60° za E_1 uz $\underline{Z}_1 = 5\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 5e^{j60^\circ}\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 5e^{-j60^\circ}\ \Omega$. Odredite pokazivanje voltmetra.



Zadani podatci su:

$$E_1 = E_2 = E_3 = 100\text{ V} ; \alpha_{E_2} - \alpha_{E_1} = 60^\circ ; \alpha_{E_3} - \alpha_{E_1} = -60^\circ ; \underline{Z}_1 = 5\ \Omega ; \underline{Z}_2 = 5\angle 60^\circ\ \Omega ; \underline{Z}_3 = 5\angle -60^\circ\ \Omega$$

Bitno je uočiti kako su zadane efektivne vrijednosti naponskih izvora, te relativni odnos njihovih faznih pomaka (iskazano dvjema jednadžbama). Kako bi se fazori napona naponskih izvora odredili potrebno je odrediti pripadne faze α_{E_1} , α_{E_2} i α_{E_3} . Naime imamo tri nepoznanice a dvije jednadžbe, što znači da rješenje nije jednoznačno. Tada je u fazorskom računu dozvoljeno pretpostaviti iznos jedne faze (može biti bilo koja vrijednost, ali najčešće se zbog jednostavnosti odabire 0°). Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je kut prve faze nula.

$$\alpha_{E_1} = 0^\circ$$

Tada je rješenje dvije jednadžbe s dvije nepoznanice α_{E_2} i α_{E_3} jednoznačno, a time su i fazori napona naponskih izvora \underline{E}_1 , \underline{E}_2 i \underline{E}_3 određeni.

$$\alpha_{E_2} = 60^\circ ; \alpha_{E_3} = -60^\circ ; \underline{E}_1 = 100\angle 0^\circ\text{ V} ; \underline{E}_2 = 100\angle 60^\circ\text{ V} ; \underline{E}_3 = 100\angle -60^\circ\text{ V}$$

Pretvorbom naponskih izvora u strujne izvore dobije se nadomjesna mreža sa šest paralelnih grana (ako zanemarimo granu u kojoj se nalazi voltmetar), u tri grane nalaze se idealni strujni izvori (\underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3), dok se u preostale tri nalaze admitancije (\underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 i \underline{Y}_3) nadomjesnih strujnih izvora. Voltmetar u novoj nadomjesnoj mreži mjeri napon koji je jednak za sve elemente (svi su elementi u paraleli).

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = 20\angle 0^\circ\text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = 20\angle 0^\circ\text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0.2 \angle 0^\circ \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0.2 \angle -60^\circ \text{ S} = 0.1 - j0.17 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.2 \angle 60^\circ \text{ S} = 0.1 + j0.17 \text{ S}$$

Kako imamo tri idealna strujna izvora (\underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3) spojena paralelno moguće ih je nadomjestiti s jednim idealnim strujnim izvorom \underline{I} . Slično vrijedi za naponske izvore, ako bi imali tri idealna naponska izvora spojena serijski moguće ih je nadomjestiti jednim idealnim naponskim izvorom.

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 60 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Admitancije (\underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 i \underline{Y}_3) spojene paralelno također se mogu nadomjestiti jednom admitancijom \underline{Y} .

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0.4 \angle 0^\circ \text{ S}$$

Nakon zamjene strujnih izvora (\underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3) jednim strujnim izvorom \underline{I} , te zamijenim admitancija (\underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 i \underline{Y}_3) jednom admitancijom \underline{Y} nadomjesna se svodi na samo dva elementa (ako zanemarimo granu u kojoj se nalazi voltmetar). U navedenom nadomjesnom krugu voltmetar mjeri napon U_V koji je jednak na oba elementa, izvoru \underline{I} i admitanciji \underline{Y} .

$$\underline{U}_V = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = 150 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Kako voltmetar pokazuje samo modul U_V fazora \underline{U}_V konačno rješenje je:

$$U_V = 150 \text{ V}$$