

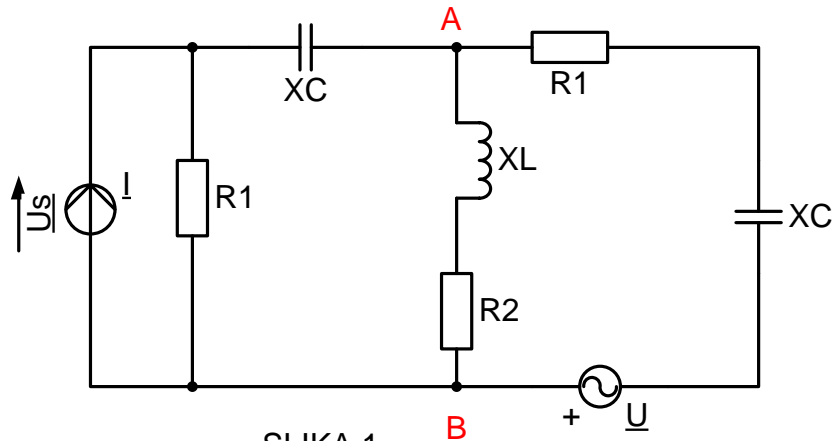
Millmanov teorem:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{E}_k \cdot \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$

Metoda napona čvorova:

$$\underline{U}_k \cdot \sum_{j=1}^m \underline{Y}_{jk} - \sum_{j=1}^m \underline{U}_j \cdot \underline{Y}_{jk} = \sum_{j=1}^m \underline{E}_{jk} \cdot \underline{Y}_{jk} + \sum_{j=1}^m \underline{I}_{jk} \quad j \neq k$$

AV\_7-Z\_1 (Kuzmanović 8.3., str.225): U mreži na slici 1 metodom Millmanovog teorema odredite struju naponskog izvora  $I_U$ . Zadano je:  $R_1 = X_C = 10 \Omega$ ,  $R_2 = X_L = 5 \Omega$ ,  $\underline{U} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\underline{I} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$ .



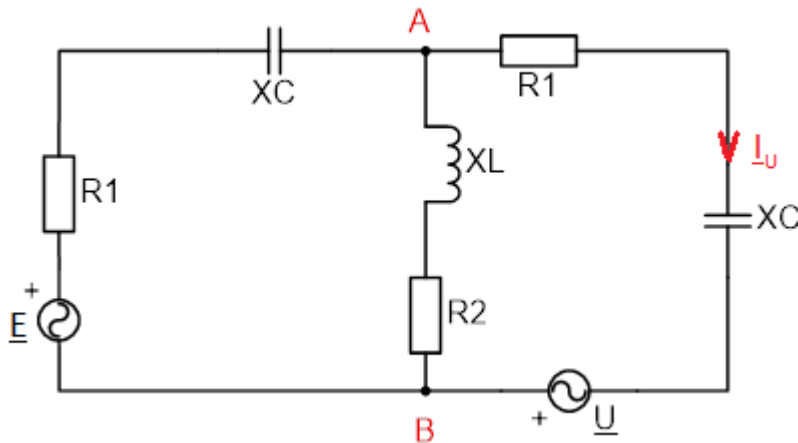
SLIKA 1

Zadani podatci su:

$$R_1 = X_C = 10 \Omega, R_2 = X_L = 5 \Omega, \underline{U} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}, \underline{I} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Iz zadane mreže se može uočiti kako se mreža sastoji od tri čvora, dok je za primjenu Millmanovog teorema potrebno imati mrežu sa dva čvora. Zamjenom realnog strujnog izvora (koji se sastoji od paralelnog spoja idealnog strujnog izvora  $\underline{I}$  i otpora  $R_1$ ) s realnim naponskim izvorom (koji se sastoji od serijskog spoja idealnog naponskog izvora  $\underline{E}$  i otpora  $R_1$ ) dobije se mreža sa dva čvora. Pri čemu je  $\underline{E}$  određen izrazom:

$$\underline{E} = R_1 \underline{I} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$



Nakon zamjene strujnog izvora naponskim izvorom mreža se sastoji od dva čvora i tri grane. Prva grana (s lijeva na desno) sastoji se od serijskog spoja idealnog naponskog izvora  $\underline{E}$ , otpora  $R_1$  i kapacitivne reaktancije  $X_C$ , pri čemu će se serijski spoj otpora  $R_1$  i kapacitivne reaktancije  $X_C$  zamijeniti admitancijom  $\underline{Y}_1$  jer je u Millmanov teoremu potrebno uvrstiti admitancije pojedinih grana. Slično kao u prvoj grani izračunat će se admitancije druge  $\underline{Y}_2$  i treće grane  $\underline{Y}_3$ .

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 - jX_C} = \frac{1}{10 - j10} = \frac{1}{14.41 \angle -45^\circ} = 0.071 \angle 45^\circ \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 + jX_L} = \frac{1}{5 + j5} = \frac{1}{7.07 \angle 45^\circ} = 0.14 \angle -45^\circ \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = \underline{Y}_1$$

Pri uporabi Millmanovog teorema potrebno je paziti na polaritete (referentne smjerove) naponskih izvora u pojedinim granama. Kako se Millmanovim teoremom računa napon između čvorova A i B,  $\underline{U}_{AB}$ , pozitivan predznak u Millmanovom teoremu (izrazu) imat će naponski izvori čija je pozitivna stezaljka okrenuta prema čvoru A, u suprotnom je predznak negativan. U prvoj grani plus stezaljka izvora  $\underline{E}$  okrenuta je prema čvoru A, dok je u trećoj grani plus stezaljka izvora  $\underline{U}$  okrenuta prema čvoru B. Primijetite da druga grana ne sadrži naponski izvor.

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{E} \underline{Y}_1 + 0 \underline{Y}_2 + (-\underline{U}) \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{E} \underline{Y}_1 - \underline{U} \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{E} \underline{Y}_1 - \underline{U} \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{(\underline{E} - \underline{U}) \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{0 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = 0 \text{ V}$$

Nakon što je poznat napon  $\underline{U}_{AB}$  moguće je izračunati struju u bilo kojoj grani mreže primjenom pripadnog KZN-a. Kako se u zadatku traži samo struja  $\underline{I}_U$  (neka je referentni smjer struje u trećoj grani od čvora A prema čvoru B) kroz naponski izvor  $\underline{U}$  potrebno je napisati KZN za petlju koja sadrži napon  $\underline{U}_{AB}$  te napone iz treće grane:

$$\underline{U}_{AB} - (R_1 - jX_C) \underline{I}_U + \underline{U} = 0$$

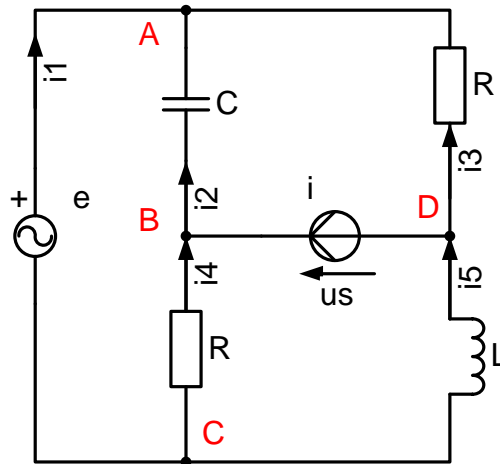
Ako se iz KZN-a izrazi struja naponskog izvora  $\underline{I}_U$  slijedi:

$$\underline{I}_U = \frac{\underline{U} + \underline{U}_{AB}}{R_1 - jX_C} = \frac{10 \angle 0^\circ + 0}{10 - j10} = 0.5 + j0.5 = 0.71 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Kako se traži samo iznos (modul fazora) struje izvora  $I_U$  rješenje je:

$$I_U = |\underline{I}_U| = 0.71 \text{ A}$$

AV\_7-Z\_2 (Vukušić, vojna 3.18., str.157): Metodom potencijala čvorova nađite fazor struje svih grana u mreži na slici 2. Zadano je:  $e = 50\sqrt{2}\sin\omega t$  V,  $i = 10\sin(\omega t + 45^\circ)$  A,  $R = X_L = X_C = 5 \Omega$ .



SLIKA 2

Zadani podatci su:

$$\underline{E} = 50\angle 0^\circ \text{ V}, \underline{I} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}, R = X_L = X_C = 5 \Omega$$

Ako se mreža sastoji od  $n$  čvorova potrebno je napisati sustav od  $n - 1$  linearnih jednadžbi za napone čvorova (jedan čvor je referentni pa se za njega ne piše jednadžba). Kako postoji više metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi (suprotni koeficijenti, supstitucija, iterativno, inverz matrice, Cramerovo pravilo...) dozvoljeno je koristiti bilo koju metodu. U našem slučaju imamo četiri čvora, tj. tri jednadžbe. Kako u mreži imamo granu (između čvora A i C) koja sadrži samo idealan naponski izvor  $\underline{E}$  potrebno je za referentni čvor odabrati jedan od navedenih čvorova (A ili C). Neka je referentni čvor A, tada jednadžba za čvor C glasi (vodeći računa o polaritetu naponskog izvora  $\underline{E}$ , tj. minus pol je okrenut prema čvoru C):

$$\underline{U}_C = -\underline{E} = -50 \text{ V}$$

Za čvor B jednadžba je:

$$\left(\frac{1}{R} + j\frac{1}{X_C}\right)\underline{U}_B - \frac{1}{R}\underline{U}_C = \underline{I}$$

Za čvor D jednadžba je:

$$\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L}\right)\underline{U}_D - \left(-j\frac{1}{X_L}\right)\underline{U}_C = -\underline{I}$$

Bitno uočiti da je vrijednost nepoznanice  $\underline{U}_C$  odmah moguće odrediti iz jednadžbe za čvor C, zato je u nastavku potrebno riješiti sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice ( $\underline{U}_B$  i  $\underline{U}_D$ ). Sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice ( $\underline{U}_B$  i  $\underline{U}_D$ ) dobiva se tako da se u jednadžbe za čvor B i D uvrsti vrijednost napona  $\underline{U}_C = -\underline{E}$ .

$$\left(\frac{1}{R} + j\frac{1}{X_C}\right)\underline{U}_B = \underline{I} - \frac{1}{R}\underline{E}$$

$$\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L}\right)\underline{U}_D = -\underline{I} + j\frac{1}{X_L}\underline{E}$$

Iz dobivene dvije jednačbe lako se mogu odrediti nepoznanice (naponi čvorova):

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{I} - \frac{1}{R}\underline{E}}{\frac{1}{R} + j\frac{1}{X_C}} = \frac{5\sqrt{2}\angle 45^\circ - \frac{50}{5}}{\frac{1}{5} + j\frac{1}{5}} = j25 \text{ V}$$

$$\underline{U}_D = \frac{-\underline{I} + j\frac{1}{X_L}\underline{E}}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L}} = \frac{-5\sqrt{2}\angle 45^\circ + j\frac{50}{5}}{\frac{1}{5} - j\frac{1}{5}} = -25 \text{ V}$$

Nakon određivanja napona čvorova moguće je izračunati struje kroz pojedine grane uvažavajući referentne smjerove struja na slici 2. Struja  $\underline{I}_2$  ima referentni smjer od čvora B prema čvoru A (ref. čvor) te prolazi kapacitivnom reaktancijom  $X_C$ .

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_B}{-jX_C} = \frac{j25}{-j5} = -5 \text{ A}$$

Struja  $\underline{I}_3$  ima referentni smjer od čvora D prema čvoru A (ref. čvor) te prolazi otporom  $R$ .

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_D}{R} = \frac{-25}{5} = -5 \text{ A}$$

Struja  $\underline{I}_4$  ima referentni smjer od čvora C prema čvoru B te prolazi otporom  $R$ .

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_B}{R} = \frac{-50 - j25}{5} = -10 - j5 \text{ A}$$

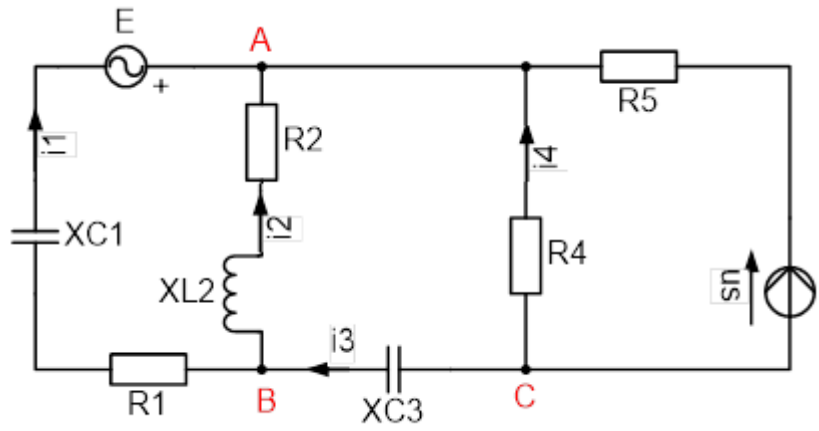
Struja  $\underline{I}_5$  ima referentni smjer od čvora C prema čvoru D te prolazi reaktancijom  $X_L$ .

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_D}{jX_L} = \frac{-50 + 25}{j5} = j5 \text{ A}$$

Struja  $\underline{I}_1$  ima referentni smjer od čvora C prema čvoru A te prolazi idealnim naponskim izvorom  $\underline{E}$ . U ovom slučaju se struja  $\underline{I}_1$  računa s pomoću KZS-a za jedan od čvorova (A ili C), što znači da je potrebno znati iznose struja  $\underline{I}_2$  i  $\underline{I}_3$  ako se odabere KZS za čvor A ili struje  $\underline{I}_4$  i  $\underline{I}_5$  ako se odabere KZS za čvor C. Zato je izračun struje  $\underline{I}_1$  ostavljen za kraj. Neka je odabran KZS za čvor A.

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 10 \text{ A}$$

AV\_7-Z\_3 (Vukušić, vojna 3.23., str.158): Metodom napona čvorova odredite struje u svim granama mreže prikazane na slici 3. Kolike su prividne snage izvora? Zadano je:  $\underline{E} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $X_{C1} = X_{C3} = 10 \Omega$ ,  $R_1 = R_4 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = X_{L2} = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 1 \Omega$ ,  $\underline{I} = 1\angle 0^\circ \text{ A}$ .



SLIKA 3

Zadani podatci su:

$$\underline{E} = 10\angle 0^\circ \text{ V}, X_{C1} = X_{C3} = 10 \Omega, R_1 = R_4 = 10 \Omega, R_2 = X_{L2} = 5 \Omega, R_5 = 1 \Omega, \underline{I} = 1\angle 0^\circ \text{ A}.$$

Kako je za metodu napona čvorova potrebno poznavati admitancije u pojedinim granama slijedi:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 - jX_{C1}} = 0.05 + j0.05 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 + jX_{L2}} = 0.1 - j0.1 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{-jX_{C3}} = j0.1 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{R_4} = 0.1 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_5} = 1 \text{ S}$$

Mreža se sastoji od tri čvora (A, B i C), neka je C ref. čvor. U tom slučaju imamo sustav dvije linearne jednačbe s dvije nepoznanice ( $\underline{U}_A$  i  $\underline{U}_B$ ).

Jednačba za čvora A glasi:

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4)\underline{U}_A - (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\underline{U}_B = \underline{E} \underline{Y}_1 + \underline{I}$$

Primijetite da se u jednačbi za čvor A izostavlja admitancija  $\underline{Y}_5$  koja je serijski spojena sa strujnim izvorom  $\underline{I}$ .

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5)\underline{U}_A - (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\underline{U}_B = \underline{E} \underline{Y}_1 + \underline{I}$$

Jednadžba za čvora B glasi:

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\underline{U}_B - (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\underline{U}_A = -\underline{E} \underline{Y}_1$$

Ako se uvrste numeričke vrijednosti admitancija i naponi/struje izvora u sustav jednadžbi slijedi:

$$(0.25 - j0.05)\underline{U}_A - (0.15 - j0.05)\underline{U}_B = 1.5 + j0.5$$

$$(0.15 + j0.05)\underline{U}_B - (0.15 - j0.05)\underline{U}_A = -0.5 - j0.5$$

Ako se sustav jednadžbi zapiše matrično slijedi:

$$\begin{bmatrix} 0.25 - j0.05 & -(0.15 - j0.05) \\ -(0.15 - j0.05) & 0.15 + j0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 + j0.5 \\ -0.5 - j0.5 \end{bmatrix}$$

Za rješavanje sustava jednadžbi primijenit će se Cramerovo pravilo (Linearna algebra):

$$D = \begin{vmatrix} 0.25 - j0.05 & -(0.15 - j0.05) \\ -(0.15 - j0.05) & 0.15 + j0.05 \end{vmatrix} \\ = (0.25 - j0.05)(0.15 + j0.05) - (0.15 - j0.05)(0.15 - j0.05) = 0.02 + j0.02$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1.5 + j0.5 & -(0.15 - j0.05) \\ -0.5 - j0.5 & 0.15 + j0.05 \end{vmatrix} = (1.5 + j0.5)(0.15 + j0.05) + (0.15 - j0.05)(-0.5 - j0.5) \\ = 0.1 + j0.1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0.25 - j0.05 & 1.5 + j0.5 \\ -(0.15 - j0.05) & -0.5 - j0.5 \end{vmatrix} = (0.25 - j0.05)(-0.5 - j0.5) + (1.5 + j0.5)(0.15 - j0.05) \\ = 0.1 - j0.1$$

$$\underline{U}_A = \frac{D_1}{D} = \frac{0.1 + j0.1}{0.02 + j0.02} = 5 \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \frac{D_2}{D} = \frac{0.1 - j0.1}{0.02 + j0.02} = -j5 \text{ V}$$

Nakon što su poznati naponi čvorova slijedi računanje struja u granama .

$$\underline{I}_1 = (\underline{E} - \underline{U}_A + \underline{U}_B)\underline{Y}_1 = (10 - 5 - j5)(0.05 + j0.05) = 0.5 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = (-\underline{U}_A + \underline{U}_B)\underline{Y}_2 = (-5 - j5)(0.1 - j0.1) = -1 \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_B \underline{Y}_3 = (-j5)j0.1 = 0.5 \text{ A}$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{U}_A \underline{Y}_4 = (-5)0.1 = -0.5 \text{ A}$$

Kako u mreži postoji strujni izvor bitno je uočiti da je struja u njegovoj grani poznata, tj. jednaka je struji strujnog izvora, odnosno nepoznanica kod strujnog izvora je napon strujnog izvora  $\underline{U}_S$ . Način računanja napona na strujnom izvoru je slično kao računanje struje kroz naponski izvor, tj. vrijedi:

$$\underline{U}_S = \underline{U}_A + \underline{I}R_5 = 5 + 1 = 6 \text{ V}$$

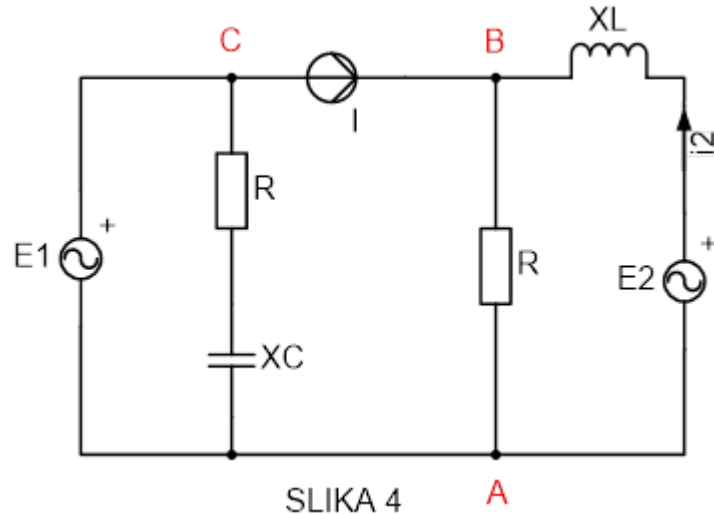
Prividne snage izvora ( $S_E$  – naponski,  $S_I$  – strujni) mogu se izračunati jer su poznate vrijednosti i struja i napona pojedinog izvora.

$$S_E = EI_1 = 5 \text{ VA}$$

$$S_I = U_S I = 6 \text{ VA}$$



**AV\_7-Z\_4** (Vukušić, vojna 3.30., str.160): Metodom napona čvorova odredite trenutne vrijednosti struje izvora  $E_2$ ,  $i_2$ , u shemi na slici 4. Zadano je:  $e_1(t) = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$  V,  $e_2(t) = 100\cos(\omega t)$  V,  $i(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$  A,  $R = X_L = X_C = 10 \Omega$ .



SLIKA 4 A

Zadani podatci su:

$$\underline{E}_1 = 20\angle 45^\circ \text{ V}, \underline{E}_2 = 50\sqrt{2}\angle 90^\circ \text{ V}, \underline{I} = 1\angle 45^\circ \text{ A}, R = X_L = X_C = 10 \Omega$$

Pri odabiru ref. čvora je potrebno uočiti da je između čvorova A i C (lijeva grana) spojen idealni naponski izvor  $\underline{E}_1$ , što znači da ref. čvor mora biti ili A ili C. Neka je A ref. čvor.

Jednadžba za čvor C glasi:

$$\underline{U}_C = \underline{E}_1 = 20\angle 45^\circ \text{ V}$$

Jednadžba za čvor B glasi:

$$\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L}\right)\underline{U}_B = \underline{E}_2 \left(-j\frac{1}{X_L}\right) + \underline{I}$$

Preuređivanjem jednadžbe za čvor B može se izravno odrediti vrijednost  $\underline{U}_B$ :

$$\underline{U}_B = \frac{-j\frac{1}{X_L}\underline{E}_2 + \underline{I}}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L}} = \frac{-j0.1 \cdot 50\sqrt{2}\angle 90^\circ + 1\angle 45^\circ}{0.1 - j0.1} = 35.36 + j42.43 \text{ V}$$

Fazor struje  $\underline{I}_2$  može se odrediti na temelju poznatog napona čvora B:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_B}{jX_L} = \frac{50\sqrt{2}\angle 90^\circ - (35.36 + j42.43)}{j10} = 2.83 + j3.53 \text{ A} = 4.53\angle 51.34^\circ \text{ A}$$

Trenutna vrijednost struje  $i_2$  određuje se na temelju fazora  $\underline{I}_2$ :

$$i_2 = 4.53\sqrt{2}\sin(\omega t + 51.34^\circ) \text{ A} = 6.4\sin(\omega t + 51.34^\circ) \text{ A}$$