

# Osnove elektrotehnike 2

## Auditorne vjebе 9: Trofazne mreže 2

Tin Benšić  
tin.bensic@ferit.hr

### 1 Teoretski podsjetnik

Trofazna mreža je svaka mreža koja ima specifičan spoj tri izvora spojena u spoj zvijezda (Y) ili trokut (D). Na te izvore spajaju se trošila također konfigurirana u spoj zvijezda (Y) ili spoj trokut (D).

Dakle, imamo jedan spoj za izvore i jedan spoj za trošila. Međusobno se izvor s trošilom povezuje pomoću vodiča (u praksi kabela i dalekovoda) koji se nazivaju linije.

Potrebno je razlikovati struje i napone izvora, linije i trošila.

#### Struje i naponi izvora:

Fazni napon i struja izvora  $U_{fi}, I_{fi}$   
Linijski napon i struja izvora  $U_l, I_l$

#### Struje i naponi linije:

Linijski napon i linijska struja  $U_{fi}, I_{fi}$

#### Struje i naponi trošila:

Fazni napon i struja trošila  $U_{ft}, I_{ft}$   
Linijski napon i struja trošila  $U_{fi}, I_{fi}$

Linijske veličine na izvoru, idealnoj liniji i trošilu su jednake!

Fazne veličine na izvoru i trošilu nisu jednake! (osim u vrlo rijetkim specijalnim slučajevima)

### Specijalni slučajevi mreža:

- Simetričan trofazni spoj izvora

$$* \underline{U}_{fi,a} = U e^{j0} \text{ V}$$

$$* \underline{U}_{fi,b} = U e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}$$

$$* \underline{U}_{fi,c} = U e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}$$

- Simetričan trofazni spoj trošila:

$$* \underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$$

- Impedancija jedne grane trošila je 0  $\rightarrow$  kratki spoj trošila
- Impedancija jedne grane trošila je  $\infty \rightarrow$  prazni hod trošila

Rješavanje trofaznih sustava radi se pomoću neke od već predstavljenih metoda rješavanja mreža.

## 2 Rješenja zadatka za AV9

### 2.1 Zadatak 1

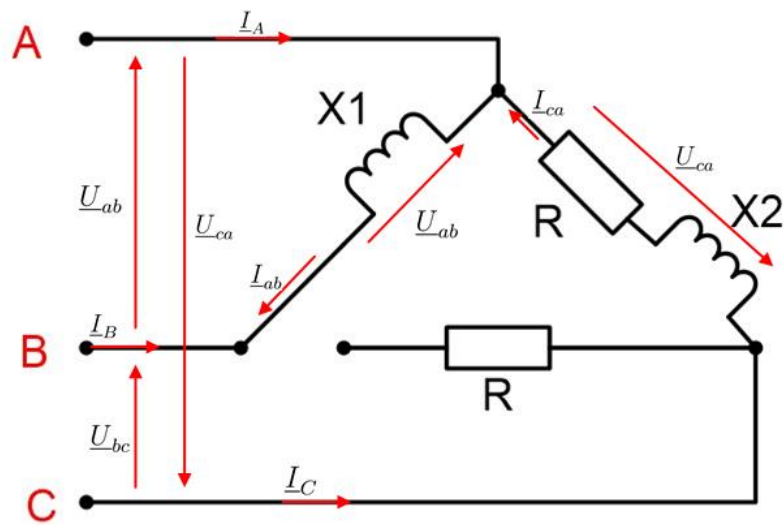
(Kuzmanović 9.6., str.252): Na nesimetričnom trofaznom trošilu (Slika 1) koje je priključeno na simetrični generator linijskog napona  $U_l = 380 \text{ V}$  došlo je do prekida u fazi CB. Ako su u tome slučaju linijske struje  $I_B = I_C = 1 \text{ A}$ , a ukupna djelatna snaga trošila  $P = 100 \text{ W}$  odredite  $R$ ,  $X_1$  i  $X_2$ .

**Zadano je:**

- $U_l = 380 \text{ V}$
- $I_B = I_C = 1 \text{ A}$
- $P = 100 \text{ W}$

**Traži se:**

- $R, X_1, X_2$



Slika 1: Shema spoja za zadatak 1.

### Rješenje zadatka:

Prvo definiramo simetrični trofazni linijski napon koji je zajednički izvoru i trošilu:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= 380e^0 \text{ V} \\ \underline{U}_{bc} &= 380e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \\ \underline{U}_{ca} &= 380e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \end{aligned} \quad (1)$$

Iz sheme, zbog praznog hoda jasno je da je preko otpora u grani B-C ne teče struja.

Prema KZS sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ab} &= -\underline{I}_B \\ \underline{I}_{ca} &= \underline{I}_C \\ \underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} \end{aligned} \quad (2)$$

Kako je u spoju trokut fazni napon jednak linijskom znamo iznose napona na svakoj grani trokuta trošila.

Koristeći se tim iznosima može se odrediti iznos reaktancije  $X_1$  i iznos impedancija  $\underline{Z}_{ca} = R + jX_2$

Prvo određujemo  $X_1$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{ab} &= -\underline{I}_B \\ I_{ab} &= I_B \\ I_{ab} &= \frac{U_{ab}}{X_1} \\ X_1 &= \frac{U_{ab}}{I_{ab}} = \frac{380}{1} = 380 \Omega\end{aligned}\tag{3}$$

Sada određujemo  $Z_{ca}$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{ca} &= \underline{I}_C \\ I_{ca} &= I_C \\ I_{ca} &= \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} \\ Z_{ca} &= \frac{U_{ca}}{I_{ca}} = \frac{380}{1} = 380 \Omega\end{aligned}\tag{4}$$

Kako bi odredili kompletno trošilo potrebno je još izračunati  $R$  i  $X_2$ . Kako bi izračunali otpor koristimo se poznatim podatkom o djelatnoj snazi  $P$ . Otpornik u grani C-A je jedino mjesto u mreži gdje se djelatna snaga može trošiti. Stoga vrijedi:

$$P = I_{ca}^2 R\tag{5}$$

$$R = \frac{P}{I_{ca}^2} = \frac{100}{1} = 100 \Omega$$

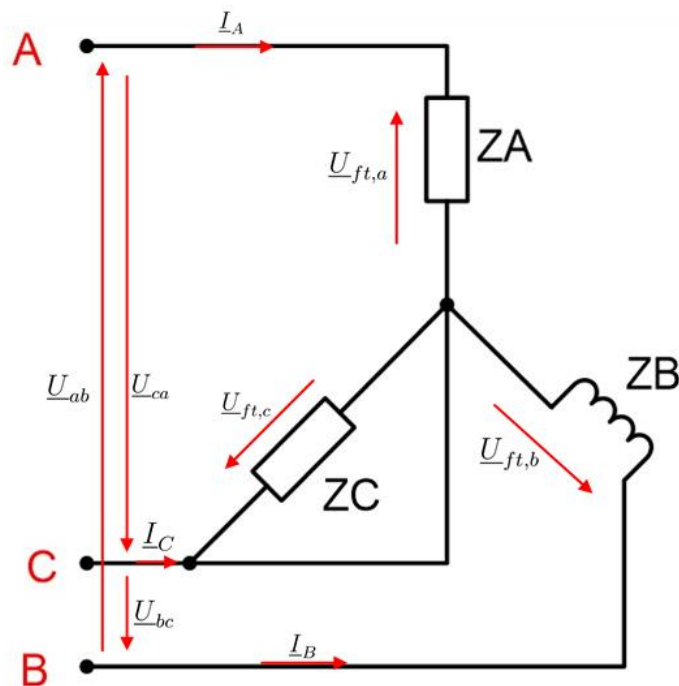
I sada se iz ukupnog iznosa impedancije druge grane računa reaktancija  $X_2$  :

$$X_2 = \sqrt{Z_{ca}^2 - R^2} = \sqrt{380^2 - 100^2} = 366.66 \Omega$$

*Zapazite da se pojava praznog hoda u spoju trokut može promatrati kao pojava kratkog spoja u spoju zvijezda, gdje novo zvjezdište nastaje u čvorištu 'A' u ovom slučaju*

## 2.2 Zadatak 2

(Felja 6.35., str.12): Struja kratko spojene faze C trošila spojenog u zvijezdu jednaka je nuli uz  $Z_B = 10 \Omega$ . Nađite impedanciju u fazi A



Slika 2: Shema spoja za zadatak 2.

**Zadano je:**

$Z_B = 10 \Omega$  - induktivno trošilo (prema shemi)  
Struja  $I_C = 0 \text{ A}$

**Traži se:**

$Z_A$

**Rješenje zadatka:**

Prvo uočavamo specifičnosti sa sheme koje zapisujemo:

- $Z_B = j10 \Omega$
- $\underline{U}_n = \underline{U}_{f,i,c}$  - fazni napon izvora preslikava se na zvjezdaste trošila!
- $\underline{U}_{f,ct} = 0$  - kratki spoj!

Ako je zvjezdište sada na potencijalu faznog napona, to znači da se na preostalim impedancijama  $Z_A$  i  $Z_B$  razvija cjelokupni linijski napon. Ovo možemo vidjeti iz KZN-a koji vrijedi u spoju zvijezda:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{ft,c} - \underline{U}_{ft,a} \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{ft,b} - \underline{U}_{ft,c}\end{aligned}\quad (6)$$

Ako uvrstimo činjenicu da je fazni napon trošila  $U_{ft,c} = 0$  zbog kratkog spoja, dobivamo:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ca} &= -\underline{U}_{ft,a} \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{ft,b}\end{aligned}\quad (7)$$

Dakle po iznosima vrijedi:

$$U_{ft,a} = U_{ft,b} = U_l$$

Nadalje, za zvjezdište vrijedi KZS:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$$

Ako tu uvrstimo zadani podatak da je  $I_C = 0$  dobvamo:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= -\underline{I}_B \\ I_A &= I_B\end{aligned}\quad (8)$$

Ako izrazimo iznose struja preko faznih napona i trošila dobivamo sljedeće:

$$\frac{U_{ft,a}}{Z_A} = \frac{U_{ft,b}}{Z_B}$$

A kako su fazni naponi po iznosima jednaki linijskim:

$$\frac{U_l}{Z_A} = \frac{U_l}{Z_B}$$

Što u konačnici po iznosu daje:

$$Z_A = Z_B = 10 \Omega$$

Preostaje još odrediti kut impedancije  $\underline{Z}_A$ . Ako nije drugačije zadano, izvor se smatra simetričnim. U tom slučaju za linijske napone vrijedi:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= U_l e^0 \text{ V} \\ \underline{U}_{bc} &= U_l e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \\ \underline{U}_{ca} &= U_l e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}\end{aligned}\quad (9)$$

Vratimo se sada na izraz (7) iz kojeg se vidi da su kutevi napona  $\underline{U}_{ca}$  i  $\underline{U}_{ft,a}$  u protufazi (negativni predznak), a kutevi napona  $\underline{U}_{bc}$  i  $\underline{U}_{ft,b}$  jednaki  
Zato vrijedi:

$$\varphi(\underline{U}_{ft,b}) = \varphi(\underline{U}_{bc}) = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\varphi(\underline{U}_{ft,a}) = \varphi(\underline{U}_{ca}) \pm \pi = \frac{2}{3}\pi \pm \pi = \frac{5}{3}\pi$$

Sada za fazu B na trošilu vrijedi:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{ft,b}}{\underline{Z}_B} = \frac{U_l}{Z_B} e^{j\varphi(\underline{U}_{ft,b}) - \varphi(\underline{Z}_B)}$$

Dakle kut struje u fazi B je:

$$\varphi(\underline{I}_B) = \varphi(\underline{U}_{ft,b}) - \varphi(\underline{Z}_B) = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{7}{6}\pi$$

Ako se sada vratimo na izraz (8), vidimo da će kut struje  $I_A$  biti u protufazi kutu struje  $I_B$ :

$$\varphi(\underline{I}_A) = \varphi(\underline{I}_B) \pm \pi = -\frac{7}{6} \pm \pi = -\frac{\pi}{6}$$

I na kraju, na isti način kao što je izračunat kut struje  $I_B$  moguće je izračunati i kut impedancije  $Z_A$ :

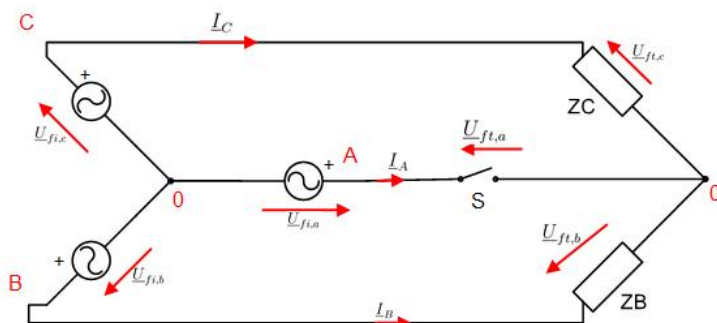
$$\varphi(\underline{Z}_A) = \varphi(\underline{U}_{ft,a}) - \varphi(\underline{I}_A) = \frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

Što nam daje kompletnu impedanciju u fazi A:

$$\underline{Z}_A = 10e^{-j\frac{\pi}{6}} \Omega$$

## 2.3 Zadatak 3.

(Felja 6.83., str.27): Trofazna mreža prema slici 3 ima parametre  $\underline{Z}_B = R_B = 10 \Omega$  i  $\underline{Z}_C = R_C = 20 \Omega$ , uz  $U_l = 208 \text{ V}$ . Izračunajte napon  $U_{0'0}$ , fazne napone izvora, fazne napone trošila i linijske struje kada je sklopka S uključena i kada je isključena.



Slika 3: Shema spoja za zadatak 3.

**Zadano je:**

$$U_l = 208 \text{ V}$$

$$R_B = 10 \Omega$$

$$R_C = 20 \Omega$$

**Traži se:**

Za slučaj otvorene i zatvorene sklopke 'S':

$$\underline{U}_{0'0}$$

$$\underline{U}_{fi,abc}, \underline{U}_{ft,abc}$$

$$\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$$

**Rješenje zadatka:**

U ovom slučaju imamo prijelaz iz stanja kratkog spoja u stanje praznog hoda jedne faze trošila. Važno je znati da nam je naponski izvor na svojim priključnicama daje stalni i nepromjenjiv napon. Zato će fazni naponi izvora te linijski naponi mreže biti neovisni o stanju sklopke.

Možemo prvo definirati onda te napone:

Linijski naponi:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= 208e^0 \text{ V} \\ \underline{U}_{bc} &= 208e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \\ \underline{U}_{ca} &= 208e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \end{aligned} \quad (10)$$

Za simetrični trofazni izvor u spoju zvijezda vrijedi da je iznos faznog napona  $\sqrt{3}$  puta manji od linijskog napona, a međusobni odnos faznog i linijskog napona je takav da linijski napon prethodni faznom za  $\frac{\pi}{6}$



Fazni naponi izvora:

$$U_{f,i} = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{fi,a} &= 120.08e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ V} \\ \underline{U}_{fi,b} &= 120.08e^{-j\frac{5}{6}\pi} \text{ V} \\ \underline{U}_{fi,c} &= 120.08e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V}\end{aligned}\quad (11)$$

Sada promatramo stranu trošila čija konfiguracija određuje struje u mreži te naponske prilike trošila.

### Uključena sklopka S:

Zbog pojave kratkog spoja:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ft,a} &= 0 \text{ V} \\ \underline{U}_{ft,b} &= -\underline{U}_{ab} = -208 \text{ V} \\ \underline{U}_{ft,c} &= \underline{U}_{ca} = 208e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}\end{aligned}\quad (12)$$

Poznavanjem faznih napona, moguće je odrediti struje trošila iz Ohmovog zakona:

$$\begin{aligned}\underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_{ft,B}}{Z_B} = \frac{208e^{j\pi}}{10} = -20.8 \text{ A} \\ \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_{ft,c}}{Z_C} = \frac{208e^{j\frac{2}{3}\pi}}{10} = 10.4e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ A}\end{aligned}\quad (13)$$

Struja u fazi A se računa iz KZN-a za zvjezdište:

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_B - \underline{I}_C = 20.8 - 10.4e^{j\frac{2}{3}\pi} = 27.51e^{-j0.1\pi} \text{ A}$$

Napon između zvjezdišta je jednak faznom naponu izvora u fazi A:

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{fi,a} = 120.08e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ V}$$

### Isključena sklopka S:

Zbog pojave praznog hoda:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= 0 \\ \underline{I}_B &= -\underline{I}_C\end{aligned}\quad (14)$$

Ako napišemo KZN za petlju koja obuhvaća linijski napon  $U_{bc}$  i trošila  $Z_B$  i  $Z_C$  dobivamo:

$$U_{bc} = \underline{I}_B \underline{Z}_B - \underline{I}_C \underline{Z}_C$$

Ako se uvrsti jednakost struja  $\underline{I}_B = -\underline{I}_C$  dobivamo:

$$\underline{I}_B = \frac{U_{bc}}{R_B + R_C} = \frac{208e^{-j\frac{2}{3}\pi}}{10 + 20} = 6.93e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_B = 6.93e^{j\frac{1}{3}\pi} \text{ A}$$

Iz Ohmovog zakona se računa fazne napone trošila:

$$\underline{U}_{ft,b} = \underline{I}_B R_B = 6.93e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cdot 10 = 69.3e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{ft,c} = \underline{I}_C R_C = 6.93e^{j\frac{1}{3}\pi} \cdot 20 = 138.67e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ V}$$

Pomoću Milmanovog teorema određujemo napon između zvjezdišta:

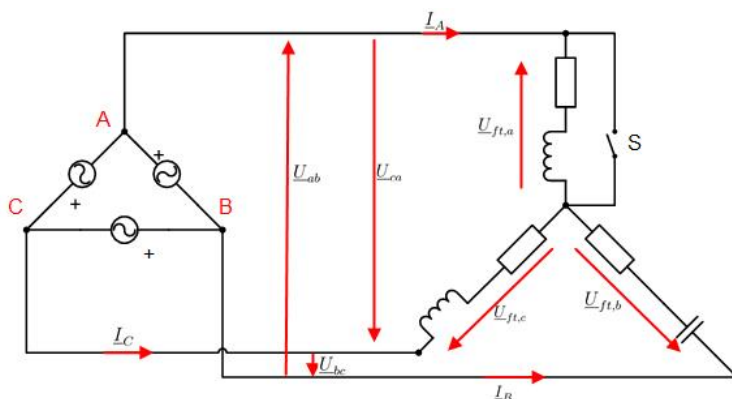
$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\frac{\underline{U}_{ft,b}}{R_B} + \frac{\underline{U}_{ft,c}}{R_C}}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = -69.33 \text{ V}$$

I u konačnici pomoću KZN-a određujemo fazni napon trošila faze A, odnosno napon koji se razvija na sklopki:

$$\underline{U}_{ft,a} = \underline{U}_{fi,a} - \underline{U}_{0'0} = 183.44e^{-j0.1\pi} \text{ V}$$

## 2.4 Zadatak 4:

(Felja 6.84., str.27): Trofazni potrošač spojen u zvijezdu napaja se iz trofaznog generatora spojenog u trokut (Slika 4). Pri tome je:  $R_A = R_B = R_C = 5 \Omega$ ,  $X_A = X_B = X_C = 8,65 \Omega$  i  $U_l = 120 \text{ V}$ . Izračunajte linijske struje u mreži za slučajeve zatvorene i otvorene sklopke S.



Slika 4: Shema spoja za zadatak 3.

**Zadano je:**

$$\begin{aligned} R_A &= R_B = R_C = 5 \Omega \\ X_A &= X_B = X_C = 8.65 \Omega \\ U_l &= 120 \text{ V} \end{aligned}$$

**Traži se:**

$$\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C \text{ - za otvorenu u zatvorenu sklopku S.}$$

**Rješenje zadatka:**

Prvo promotrimo slučaj izvora spojenog u trokut. Ovakav izvor ima fazni napon jednak linijskom naponu. Nadalje u izračunima nam takav izvor komplicira proračune jer se mogu pojaviti nesimetrične struje u trokutu kao posljedica nesimetričnog trošila koje zahtijevaju dodatne izračune. Način kako smo rješavali slučajeve mreže s nesimetričnim trošilom i izvorom spojenim u zvijezdu bio je Milmanov teorem, koji nam pojednostavljuje sve KZN-ove. Ni njega nije moguće koristiti kod izvora spojenog u trokut.

Zato je nama pogodnije napraviti prijelaz TROKUT  $\rightarrow$  ZVIJEZDA te računati kao da imamo izvor u zvijezdi.

Naravno uvjet za takav prelazak je da se sa stanovišta trošila ništa ne mijenja (struje i naponi trošila)!

Kako su struje i naponi trošila definirani mrežom potrošača i linijskim naponom, jasno je da izvor u spoju trokut i nadomjesni izvor u spoju zvijezda moraju nužno imati jednake linijske napone!

Simetrični izvor u spoju zvijezda koji ima linijski napon  $U_l$  ima fazni napon  $U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$

Dakle za **nadomjesni izvor** u spoju ZVIJEZDA:

$$\begin{aligned}
 U_f &= \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69.28 \text{ V} \\
 \underline{U}_{fi,a} &= 69.28e^{j0} \text{ V} \\
 \underline{U}_{fi,b} &= 69.28e^{-j\frac{2}{3}\pi} \text{ V} \\
 \underline{U}_{fi,c} &= 69.28e^{j\frac{2}{3}\pi} \text{ V}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Linijske napone možemo definirati prema referentnim faznima:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{ab} &= 120e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ V} \\
 \underline{U}_{bc} &= 120e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ V} \\
 \underline{U}_{ca} &= 120e^{j\frac{5}{6}\pi} \text{ V}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Sada je lako postaviti jednadžbe mreže za oba slučaja.

Nemojte se prevariti pa misliti da se radi o simetričnom trošilu, naime u fazi B trošila imamo kapacitet, dok faze A i C imaju induktivitet kao rekatancije.

### Otvorena sklopka S:

U ovom slučaju imamo klasičnu nesimetričnu mrežu koja se napaja iz simetričnog izvora. prvo određujemo impedancije svih grana trošila:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_A &= R + jX_A = 5 + j8.65 = 10e^{j0.33\pi} \Omega \\
 \underline{Z}_B &= R - jX_B = 5 - j8.65 = 10e^{-j0.33\pi} \Omega \\
 \underline{Z}_C &= R + jX_C = 5 + j8.65 = 10e^{j0.33\pi} \Omega
 \end{aligned}$$

Uz poznate impedancije trošila može se primjenjivati Milmanov teorem koristeći se nadomjesnim izvorom spojenim u zvijezda spoj:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\frac{\underline{U}_{fi,a}}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{U}_{fi,b}}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{U}_{fi,c}}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = 69.22 \text{ V}$$

*Valja napomenuti da je pri rezultatu za  $U_{0'0}$  zanemaren rezultat za imaginarni dio koji je iznosio 0.034 kako bi se daljnji proračuni pojednostavili. Kada je realni dio veći od imaginarnog (ili obrnuto) za 100x onda su ovakva zanemarenja u potpunosti prihvatljiva*

Koristeći se KZN-ovima preko napona između dva zvjezdišta dobivamo fazne napone trošila:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ft,a} &= \underline{U}_{fi,a} - \underline{U}_{0'0} = 0 \text{ V} \\ \underline{U}_{ft,b} &= \underline{U}_{fi,b} - \underline{U}_{0'0} = 120e^{j1.17\pi} \text{ V} \\ \underline{U}_{ft,c} &= \underline{U}_{fi,c} - \underline{U}_{0'0} = 120e^{-j1.17\pi} \text{ V}\end{aligned}\tag{17}$$

I sada uz poznate fazne napone trošila određujemo fazne struje trošila:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \frac{\underline{U}_{ft,a}}{Z_A} = 0 \text{ A} \\ \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_{ft,B}}{Z_B} = -j12.003 \text{ A} \\ \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_{ft,C}}{Z_C} = j12.003 \text{ A}\end{aligned}\tag{18}$$

**Zatvorena sklopka S:** U ovom slučaju imamo postupak identičan postupku u Zadatku 3. uz naravno različite impedancije trošila i iznose napona. Upravo zato ovdje dajemo samo rezultate:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= -\underline{I}_B - \underline{I}_C = 0 \text{ A} \\ \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_{ft,B}}{Z_B} = -j12.01 \text{ A} \\ \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_{ft,C}}{Z_C} = j12.01 \text{ A}\end{aligned}\tag{19}$$