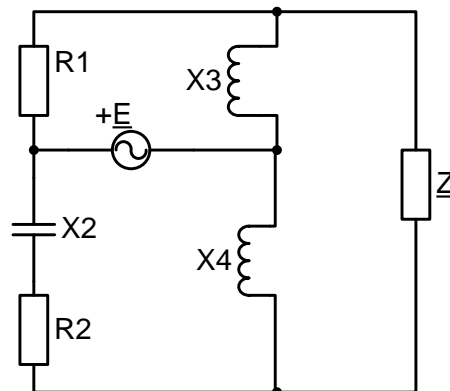


AV_10-Z_1 (Kuzmanović, 8.10, str.226): U shemi na slici 1 odredite struju I (kroz impedanciju \underline{Z}) primjenom a) Theveninovog i b) Nortonovog teorema. Zadano: $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $X_2 = 4 \Omega$, $X_3 = 2 \Omega$, $X_4 = 3 \Omega$, $\underline{Z} = 5 + j \Omega$, $\underline{E} = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$.

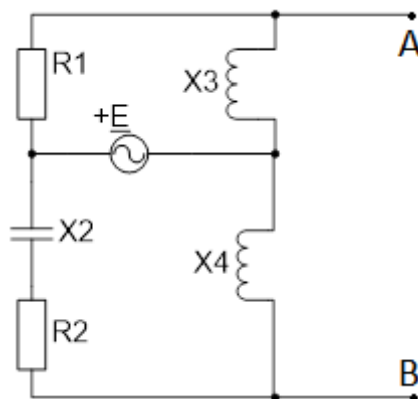


SLIKA 1

Zadani podatci su:

$$R_1 = 2 \Omega, R_2 = 3 \Omega, X_2 = 4 \Omega, X_3 = 2 \Omega, X_4 = 3 \Omega, \underline{Z} = 5 + j = 5.1 \angle 11.31^\circ \Omega, \underline{E} = 100 \angle -30^\circ = 86.6 - j50 \text{ V}$$

Odspajanjem impedancije \underline{Z} između točaka A i B dobivamo nadomjesnu shemu koja će se koristiti za Theveninov i Nortonov teorem.



Slika 1.1.

a) Theveninov teorem

Prema Theveninu potrebno je odrediti parametre realnog naponskog izvora (\underline{E}_T i \underline{Z}_T) s obzirom na točke A i B.

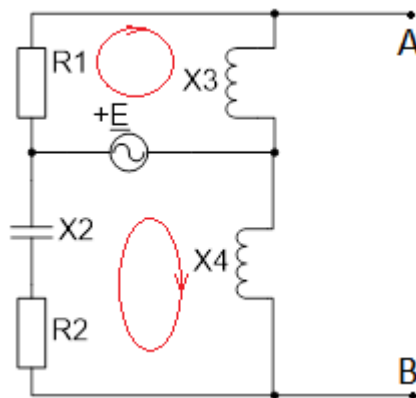
Pri određivanju impedancije \underline{Z}_T potrebno je zamijeniti sve naponske izvore kratkim spojem i sve strujne izvore otvorenim stezaljkama nakon čega ostaje pasivna mreža (mreža bez izvora, tj. sastoji se samo od otpora, reaktancija, impedancija...). U našem slučaju zamjenom naponskog izvora \underline{E} kratkim spojem dobije se pasivna mreža koja se sastoji od R_1 , R_2 , X_2 , X_3 i X_4 . Impedancija \underline{Z}_T se određuje kao impedancija pasivne mreže između točaka A i B, tj. u

našem slučaju je potrebno uočiti da su R_1 i X_3 spojeni paralelno te daju nadomjesnu impedanciju \underline{Z}_{13} , dok je serijska kombinacija otpora R_2 i reaktancije X_2 spojena paralelno s reaktancijom X_4 te tvore nadomjesnu impedanciju \underline{Z}_{24} . Ukupna impedancija \underline{Z}_T dobije se zbrajanjem nadomjesnih impedancija \underline{Z}_{13} i \underline{Z}_{24} , jer su spojene serijski.

$$\underline{Z}_{13} = \frac{R_1 j X_3}{R_1 + j X_3} ; \quad \underline{Z}_{24} = \frac{(R_2 - j X_2) j X_4}{R_2 + j(X_4 - X_2)}$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{24} = \frac{R_1 j X_3}{R_1 + j X_3} + \frac{(R_2 - j X_2) j X_4}{R_2 + j(X_4 - X_2)} = 3.7 + j4.9 \Omega$$

Theveninov napon \underline{E}_T je napon između čvorova A i B pri čemu je potrebno zadržati sve izvore u nadomjesnoj mreži (slika 1.1.). Kako bi se odredio napon \underline{E}_T potrebno je primijeniti neki od teorema za rješavanje mreža (izravna primjena KZ-a, metoda konturnih struja, metoda napona čvorova...). Neka je odabrana metoda konturnih struja. Potrebno je napisati dvije jednačbe, tj. za petlju iznad i ispod naponskog izvora (sl.1.2.). Neka je konturna struja u gornjoj petlji označena s \underline{I}_{13} a u donjoj s \underline{I}_{24} .



Slika 1.2.

Jednačbe konturnih struja su:

$$(R_1 + j X_3) \underline{I}_{13} = \underline{E}$$

$$(R_2 + j(X_4 - X_2)) \underline{I}_{24} = -\underline{E}$$

Iz navedenih jednačbi za konturne struje jednostavno se određuju iznosi konturnih struja \underline{I}_{13} i \underline{I}_{24} jer je sustav linearnih jednačbi raspregnut (u prvoj jednačbi se nalazi samo prva nepoznanica \underline{I}_{13} , tj. u drugoj jednačbi se nalazi samo druga nepoznanica \underline{I}_{24} . Fizikalno gledano razlog raspregnutih jednačbi je idealan naponski izvor, tj. kada bi se u njegovoj grani nalazila impedancija tada jednačbe ne bi bile raspregnute).

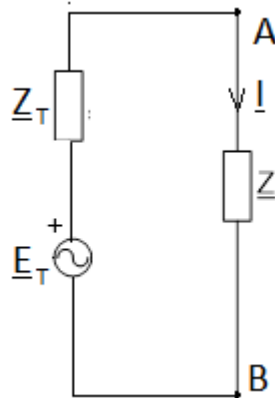
$$\underline{I}_{13} = \frac{\underline{E}}{R_1 + j X_3} = 9.15 - j34.15 = 35.35 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{24} = \frac{-\underline{E}}{R_2 + j(X_4 - X_2)} = -30.98 + j6.34 = 31.62 \angle 168.43^\circ \text{ A}$$

Napon između točaka A i B, \underline{U}_{AB} , određuje se na temelju KZN-a (sl.1.2.):

$$\underline{E}_T = \underline{U}_{AB} = jX_3 \underline{I}_{13} + jX_4 \underline{I}_{24} = 49.28 - j74.64 = 89.44 \angle -56.57^\circ \text{ V}$$

Nakon što su poznati parametri Theveninovog izvora mreža se može prikazati prema slici 1.3. Na temelju navedene nadomjesne mreže jednostavno je odrediti struju \underline{I} prema KZN-u.



Slika 1.3.

$$\underline{E}_T = (\underline{Z}_T + \underline{Z})\underline{I}$$

Ako se iz KZN-a izrazi struja \underline{I} slijedi:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}} = -0.105 - j8.508 \text{ A}$$

Kako se traži modul fazora struje \underline{I} slijedi:

$$I = |\underline{I}| = 8.509 \text{ A}$$

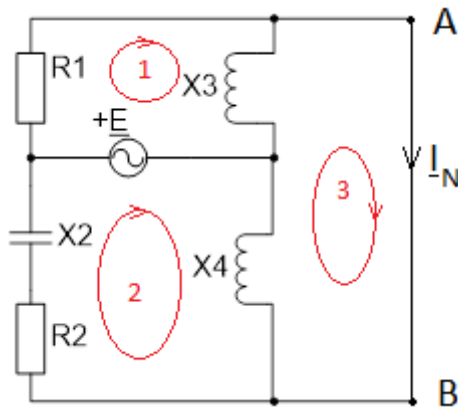
b) Nortonov teorem

Prema Nortonu potrebno je odrediti parametre realnog strujnog izvora (\underline{I}_N i \underline{Z}_N).

Nortonova impedancija \underline{Z}_N jednaka je Theveninovoj \underline{Z}_T , tj. preuzet će se iz prethodnog djela zadatka.

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_T = 3.7 + j4.9 \Omega$$

Nortonova struja \underline{I}_N računa se na temelju nadomjesne sheme prema slici 1.4. Pri računanju struje \underline{I}_N primijenit će se metoda konturnih struja. Mogu se uočiti tri konture sa pripadnim konturnim strujama \underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3 .



Slika 1.4.

$$(R_1 + jX_3)L_1 - jX_3L_3 = \underline{E}$$

$$(R_2 + j(X_4 - X_2))L_2 - jX_4L_3 = -\underline{E}$$

$$(jX_4 + jX_3)L_3 - jX_3L_1 - jX_4L_2 = 0$$

Pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi koristit će se Cramerovo pravilo. Također je bitno uočiti da je dovoljno izračunati samo struju treće konture L_3 jer je ona jednaka struji I_N . Matrični zapis jednadžbi je:

$$\begin{bmatrix} R_1 + jX_3 & 0 & -jX_3 \\ 0 & R_2 + j(X_4 - X_2) & -jX_4 \\ -jX_3 & -jX_4 & j(X_4 + X_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \\ -\underline{E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kako je moguće jednadžbe međusobno dodavati/oduzimati (općenitije - raditi linearne kombinacije) neka su trećoj jednadžbi dodane prve dvije (bitno je uočiti da se mijenja samo treća jednadžba). Ovaj korak će značajno pojednostavniti daljnje računanje determinanti jer imamo jedan nulti element više (pokušajte doći do rješenja sustava jednadžbi prije dodavanja ☺). Novi sustav nakon linearne kombinacije je:

$$\begin{bmatrix} R_1 + jX_3 & 0 & -jX_3 \\ 0 & R_2 + j(X_4 - X_2) & -jX_4 \\ R_1 & R_2 - jX_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \\ -\underline{E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti slijedi:

$$\begin{bmatrix} 2 + j2 & 0 & -j2 \\ 0 & 3 - j & -j3 \\ 2 & 3 - j4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \angle -30^\circ \\ -100 \angle -30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 + j2 & 0 & -j2 \\ 0 & 3 - j & -j3 \\ 2 & 3 - j4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - [-j2(3 - j)2 - j3(3 - j4)(2 + j2) + 0] = \dots \\ = 10 + j54$$

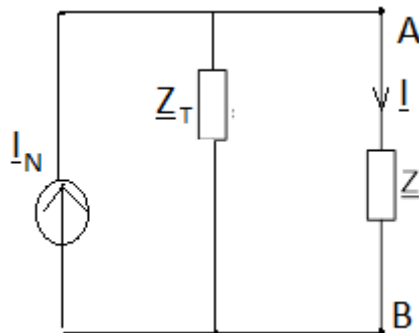
$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 + j2 & 0 & 100\angle -30^\circ \\ 0 & 3 - j & -100\angle -30^\circ \\ 2 & 3 - j4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 - [100\angle -30^\circ(3 - j)2 + 100\angle -30^\circ(3 - j4)(2 + j2) + 0]$$

$$= \dots = 692.8 - j400$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{692.8 - j400}{10 + j54} = -4.86 - j13.73 \text{ A}$$

Nakon što su poznati parametri Nortonovog izvora mreža se može prikazati prema slici 1.5. Kako su impedancije \underline{Z}_T i \underline{Z} spojene paralelno moguće je pronaći ukupnu admitanciju \underline{Y}_{uk} .



Slika 1.5.

$$\underline{Y}_{uk} = \frac{1}{\underline{Z}_T} + \frac{1}{\underline{Z}} = 0.29 - j0.168 \text{ S}$$

Napon između točaka A i B je napon na svim elementima u nadomjesnoj shemi na slici 1.5 jer su međusobno spojeni paralelno. Napon \underline{U}_{AB} moguće je odrediti prema:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_N}{\underline{Y}_{uk}} = 7.98 - j42.64 \text{ V}$$

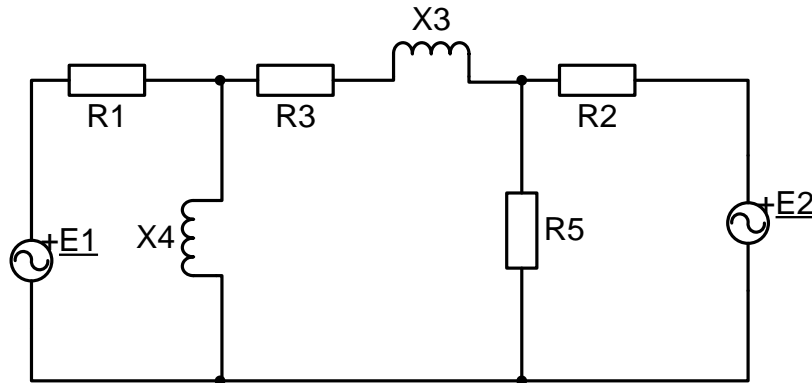
Struja \underline{I} sada se može odrediti prema:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = -0.105 - j8.508 \text{ A}$$

Konačno, modul struje \underline{I} je:

$$I = |\underline{I}| = 8.509 \text{ A}$$

AV_10-Z_2 (Kuzmanović, 8.8, str.226): U shemi na slici 2 zadano je: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3.1 \Omega$, $X_3 = 3.5 \Omega$, $X_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $\underline{E}_1 = 30 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = 20 \text{ V}$. Treba odrediti djelatnu snagu na otporu R_3 . Kolika bi morala biti impedancija \underline{Z}_3 (impedancija \underline{Z}_3 sastoji se od serijskog spoja R_3 i X_3) da bi otpor R_3 trošio maksimalnu snagu? Kolika je ta snaga?

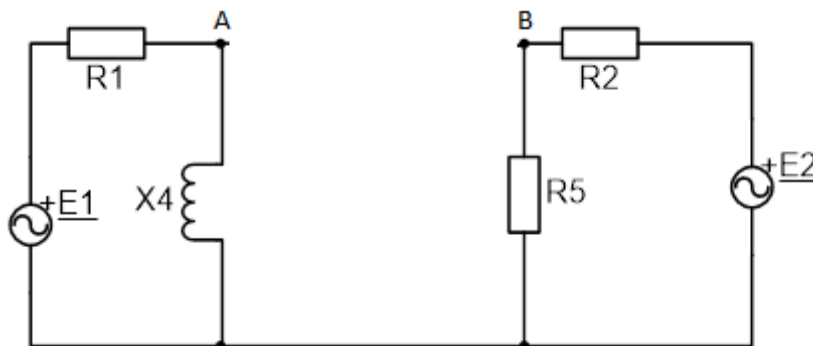


SLIKA 2

Zadani podatci su:

$$R_1 = 5 \Omega, R_2 = 4 \Omega, R_3 = 3.1 \Omega, X_3 = 3.5 \Omega, X_4 = 5 \Omega, R_5 = 6 \Omega, \underline{E}_1 = 30 \text{ V}, \underline{E}_2 = 20 \text{ V}$$

Kako bi se riješio zadatak potrebno je primijeniti Theveninov teorem s obzirom na impedanciju \underline{Z}_3 . Ako se impedancija \underline{Z}_3 odspoji iz mreže nadomjesna shema je prema slici 2.1.



Slika 2.1.

Theveninov napon \underline{E}_T (između točaka A i B) određuje se pisanjem KZN-ova. Neka struja \underline{I}_{14} izlazi iz pozitivne stezaljke naponskog izvora \underline{E}_1 , slično, neka struja \underline{I}_{25} izlazi iz pozitivne stezaljke izvora \underline{E}_2 .

$$\underline{E}_1 = (R_1 + jX_4)\underline{I}_{14}$$

$$\underline{E}_2 = (R_2 + R_5)\underline{I}_{25}$$

Navedene jednadžbe su raspregnute pa je jednostavno doći do struja \underline{I}_{14} i \underline{I}_{25} .

$$I_{14} = \frac{E_1}{R_1 + jX_4} = 3 - j3 \text{ A}$$

$$I_{25} = \frac{E_2}{R_2 + R_5} = 2 \text{ A}$$

Napon između točaka A i B se također dobije na temelju KZN-a.

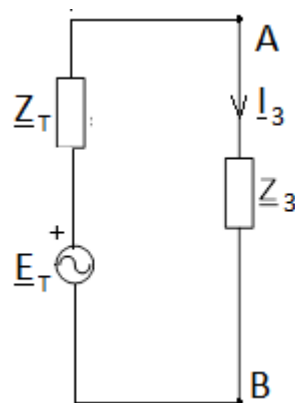
$$E_T = U_{AB} = jX_4 I_{14} - R_5 I_{25} = 3 + j15 \text{ V}$$

Theveninova impedancija Z_T (između točaka A i B) određuje se iz pasivne mreže koja se dobije iz nadomjesne sheme prema slici 2.1. zamjenom naponskih izvora E_1 i E_2 kratkim spojem. Nadalje, nakon zamjene naponskih izvora kratkim spojem, može se uočiti kako su R_1 i X_4 spojeni paralelno dajući nadomjesnu impedanciju Z_{14} , također uočava se paralelan spoj R_2 i R_5 koji daje nadomjesnu impedanciju Z_{25} . Ukupna impedancija između točaka A i B dobije se zbrajanjem nadomjesnih impedancija Z_{14} i Z_{25} jer su serijski spojene.

$$Z_{14} = \frac{R_1 jX_4}{R_1 + jX_4} ; \quad Z_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}$$

$$Z_T = Z_{14} + Z_{25} = \frac{R_1 jX_4}{R_1 + jX_4} + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = 4.9 + j2.5 \Omega$$

Kada je poznat nadomjesni Theveninov izvor za mrežu prema slici 2.1. moguće je napraviti novu nadomjesnu shemu prema slici 2.2.



Slika 2.2.

Struja I_3 može se izračunati na temelju KZN-a (slika 2.2.), nakon čega je jednostavno odrediti i snagu P_3 na otporu R_3 . Impedancija Z_3 sastoji se od serijskog spoja R_3 i X_3 .

$$I_3 = \frac{E_T}{Z_T + R_3 + jX_3} = 1.14 + j1.02 \text{ A}$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 7.254 \text{ W}$$

Kako bi se odredila impedancija \underline{Z}_{3m} na kojoj se razvija maksimalna djelatna snaga potrebno je koristiti teorem maksimalne snage, prema kojemu se maksimalna snaga razvija na impedanciji koja je jednaka konjugiranoj Theveninovoj impedanciji. Nadomjesna shema je prema slici 2.2. uz zamjenu impedancije \underline{Z}_3 impedancijom \underline{Z}_{3m} .

$$\underline{Z}_{3m} = \underline{Z}_T^* = 4.9 - j2.5 \Omega$$

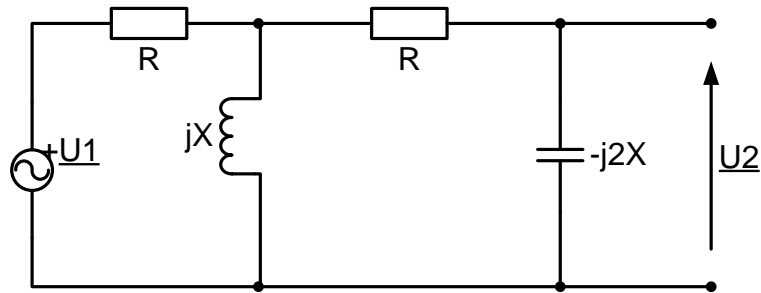
Pri impedanciji \underline{Z}_{3m} struja I_{3m} je:

$$I_{3m} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_{3m}} = 0.306 + j1.531 \text{ A}$$

Maksimalna snaga P_{3m} je:

$$P_{3m} = I_{3m}^2 \operatorname{Re}\{\underline{Z}_{3m}\} = 11.94 \text{ W}$$

AV_10-Z_3 (Felja, 5.82, str.90): Izračunajte odnos napona $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ za spoj prema slici 3. Zadano je: $R = 2 \Omega$, $X = 4 \Omega$.

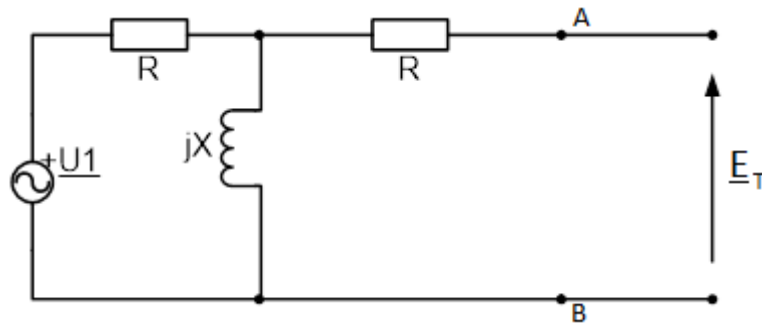


SLIKA 3

Zadani podatci su:

$$R = 2 \Omega, X = 4 \Omega$$

Zadatak će se riješiti primjenom Theveninovog teorema. Napon \underline{U}_2 je napon na kapacitetu (sl.3.), tj. zato će se kapacitet odspojiti te će se odrediti nadomjesni Thevenenov izvor s obzirom na kapacitet, slika 3.1.



Slika 3.1.

Thevenenov napon \underline{E}_T (između stezaljki A i B, sl.3.1.) jednak je naponu na induktiviteu, odnosno struju \underline{I}_{RX} (izlazi iz pozitivne stezaljke izvora) moguće je odrediti prema:

$$\underline{I}_{RX} = \frac{\underline{U}_1}{R + jX}$$

Pad napona na induktivitetu \underline{U}_X jednak je \underline{E}_T :

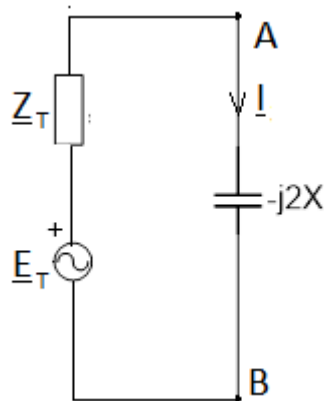
$$\underline{E}_T = \underline{U}_X = jX \underline{I}_{RX} = \frac{jX}{R + jX} \underline{U}_1$$

Theveninova impedancija \underline{Z}_T (između točaka A i B) određuje se iz pasivne mreže koja se dobije iz nadomjesne sheme prema slici 3.1. nakon što se naponski izvor zamjeni kratkim spojem.

Nadalje, nakon zamjene naponskog izvora kratkim spojem, može se uočiti kako je impedancija između točaka A i B jednaka:

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB} = R + \frac{RjX}{R + jX} = 3.6 + j0.8 \Omega$$

Kada je poznat nadomjesni Theveninov izvor za mrežu prema slici 3.1. moguće je napraviti novu nadomjesnu shemu prema slici 3.2.



Slika 3.2.

Kako je napon \underline{U}_2 jednak naponu između točaka A i B pri opterećenom Theveninovom izvoru kapacitivnom reaktancijom (sl. 3.2.), moguće je odrediti struju \underline{I} a zatim i napon \underline{U}_2 .

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T - j2X}$$

Ako se uvrsti izraz za \underline{E}_T slijedi:

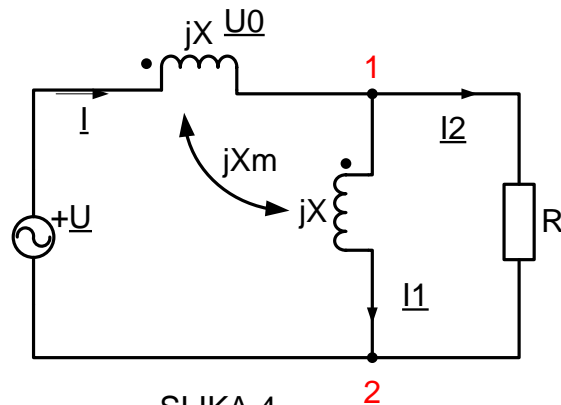
$$\underline{I} = \frac{jX}{(R + jX)(\underline{Z}_T - j2X)} \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_2 = -j2X \underline{I} = \frac{2X^2}{(R + jX)(\underline{Z}_T - j2X)} \underline{U}_1$$

Konačno, omjer $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ je:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{2X^2}{(R + jX)(\underline{Z}_T - j2X)} = 0.889$$

AV_10-Z_4 (Felja, 4.33, str.61): Zadana je mreža na slici 4 kojoj je $U = 200 \text{ V}$, $X = 140 \Omega$, $R = 30 \Omega$, $X_m = 60 \Omega$. Naći struje I , I_1 i I_2 te napone U_0 i U_{12} .



SLIKA 4

Zadani podatci su: $U = 200 \text{ V}$, $X = 140 \Omega$, $R = 30 \Omega$, $X_m = 60 \Omega$

Neka je kut fazora napona izvora \underline{U} nula (imaginarni dio je također nula).

$$\underline{U} = 200 \text{ V}$$

Tražene veličine mogu se odrediti izravnom primjenom KZN-a i KZS-a. Pri pisanju KZN-ova potrebno je paziti na predznake međuinukcije. Iz sheme prema sl. 4. uočava se da su struje \underline{I} i \underline{I}_1 takvog smjera da je predznak zbog međuinukcije jednak predznaku uslijed samoindukcije.

$$jX\underline{I} + jX_m\underline{I}_1 + jX\underline{I}_1 + jX_m\underline{I} = \underline{U}$$

$$jX\underline{I}_1 + jX_m\underline{I} - R\underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0$$

Sustav linearnih jednadžbi s tri nepoznanice (\underline{I} , \underline{I}_1 i \underline{I}_2) može se zapisati matrično. Pri rješavanju uporabiti će se Cramerovo pravilo.

$$\begin{bmatrix} j(X + X_m) & j(X + X_m) & 0 \\ jX_m & jX & -R \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti slijedi:

$$\begin{bmatrix} j200 & j200 & 0 \\ j60 & j140 & -30 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Za računanje determinante D koristi se Sarussovo pravilo, za determinantu D_1 razvoj po prvom stupcu, za determinantu D_2 razvoj po drugom stupcu te za determinantu D_3 razvoj po trećem stupcu.

$$D = \begin{vmatrix} j200 & j200 & 0 \\ j60 & j140 & -30 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ = (j200)(j140)(-1) + (j200)(-30)(1) + 0 \\ - [0 + (-30)(-1)(j200) + (-1)(j200)(j60)] = \dots = 16000 - j12000$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 200 & j200 & 0 \\ 0 & j140 & -30 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} j140 & -30 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6000 - j28000$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} j200 & 200 & 0 \\ j60 & 0 & -30 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -200 \begin{vmatrix} j60 & -30 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6000 + j12000$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} j200 & j200 & 200 \\ j60 & j140 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} j60 & j140 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -j40000$$

$$\underline{I} = \frac{D_1}{D} = 0.6 - j1.3 \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{D_2}{D} = -0.6 + j0.3 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{D_3}{D} = 1.2 - j1.6 \text{ A}$$

Kako se traže moduli fazora struja \underline{I} , \underline{I}_1 i \underline{I}_2 slijedi:

$$I = |\underline{I}| = 1.43 \text{ A}$$

$$I_1 = |\underline{I}_1| = 0.67 \text{ A}$$

$$I_2 = |\underline{I}_2| = 2 \text{ A}$$

Potrebno je još izračunati napone U_0 i U_{12} . Napon \underline{U}_0 može se izračunati kao zbroj napona uslijed samoindukcije i međuinukcije.

$$\underline{U}_0 = jX\underline{I} + jX_m\underline{I}_1 = 164 + j48 \text{ V}$$

Potrebno je odrediti modul napona \underline{U}_0 , slijedi:

$$U_0 = |\underline{U}_0| = 170.88 \text{ V}$$

Napon U_{12} može se odrediti iz pada napona na otporu R .

$$U_{12} = |R\underline{I}_2| = 60 \text{ V}$$