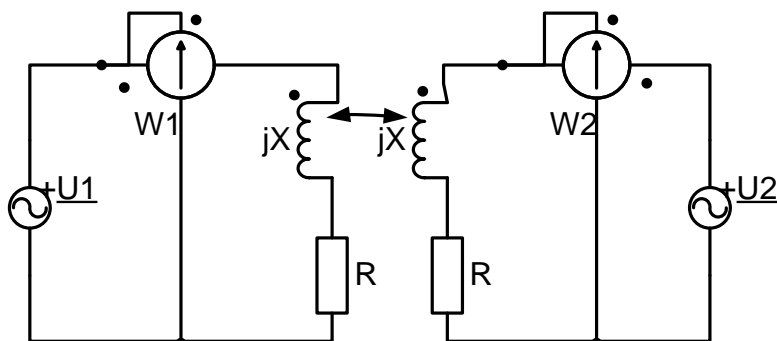


AV_9-Z_1: U mreži na slici 1 odredite pokazivanja vatmetara. Zadano je: $R = 3 \Omega$, $X = 4 \Omega$, $X_m = 3 \Omega$, $\underline{U}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_2 = 6 \angle 36,5^\circ \text{ V}$.



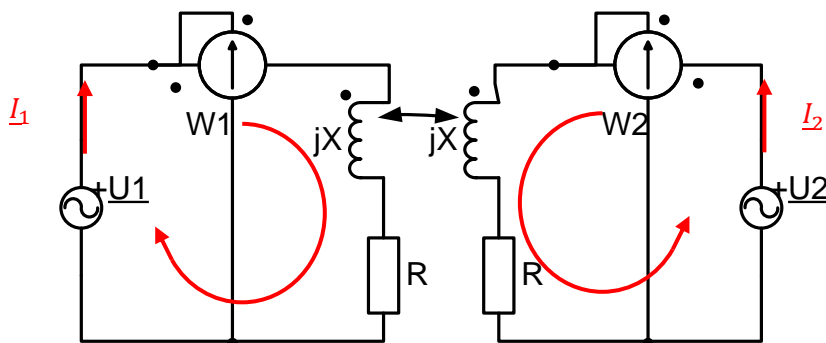
SLIKA 1

Riešenje:

Poznati podaci: $R = 3 \Omega$, $X = 4 \Omega$, $X_m = 3 \Omega$, $\underline{U}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_2 = 6 \angle 36,5^\circ \text{ V}$

Potrebno odrediti: P_1, P_2

Potrebno je napisati jednadžbe KZN-a za obje petlje. Ako smatramo da struje petlji izlaze iz „+“ stezaljki izvora, smjer obilaska prve petlje će biti u smjeru kazaljke na satu, a smjer obilaska druge petlje bit će suprotnog smjera od smjera kazaljke na satu.



SLIKA 1

Ako struje ulaze u istoimene priključnice svitaka (na shemi označene točkom) tokovi samoindukcije i međuinukcije se **pomažu**:

$$\underline{U}_1 = R\underline{I}_1 + jX\underline{I}_1 + jX_m\underline{I}_2 = (R + jX)\underline{I}_1 + jX_m\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = R\underline{I}_2 + jX\underline{I}_2 + jX_m\underline{I}_1 = (R + jX)\underline{I}_2 + jX_m\underline{I}_1$$

Iz KZN-a za prvu petlju možemo odrediti izraz za struju \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{jX_m} [\underline{U}_1 - (R + jX)\underline{I}_1]$$

Dobiveni izraz možemo uvrstiti z KZN za drugu petlju:

$$\underline{U}_2 = (R + jX) \frac{1}{jX_m} \cdot [\underline{U}_1 - (R + jX)\underline{I}_1] + jX_m \underline{I}_1$$

$$jX_m \underline{U}_2 = (R + jX)\underline{U}_1 - (R + jX)^2 \underline{I}_1 - X_m^2 \underline{I}_1$$

$$[(R + jX)^2 + X_m^2] \underline{I}_1 = (R + jX)\underline{U}_1 - jX_m \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \frac{(R + jX)\underline{U}_1 - jX_m \underline{U}_2}{(R + jX)^2 + X_m^2}$$

Struja prve petlje \underline{I}_1 izražena je pomoću poznatih napona \underline{U}_1 i \underline{U}_2 te poznatih otpora R i reaktancija X , X_m . Uvrštavanjem navedenih broječnih vrijednosti dobivamo struju prve petlje:

$$\underline{I}_1 = 1,2 - j1,6 = 2e^{-j53,13^\circ} \text{ A}$$

Nadalje iz izraza za struju druge petlje \underline{I}_2 možemo odrediti njen iznos i fazni kut:

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{jX_m} [\underline{U}_1 - \underline{I}_1(R + jX)]$$

$$\underline{I}_2 = 0 \text{ A}$$

Umnožak fazora napona i i kompleksno-konjugiranog fazora struje kroz odgovarajući vatmetar daje kompleksnu snagu:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 10 \cdot (1,2 + j1,6) = 12 + j16 \text{ VA}$$

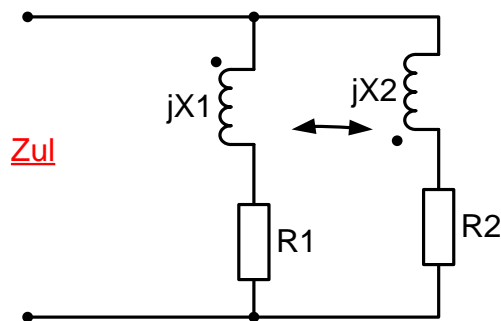
$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = 6e^{j36,5^\circ} \cdot 0 = 0 \text{ VA}$$

Prema tome vatmetri pokazuju djelatne snage:

$$P_1 = \text{Re}\{\underline{S}_1\} = 12 \text{ W}$$

$$P_2 = \text{Re}\{\underline{S}_2\} = 0 \text{ W}$$

AV_11-Z_2: U mreži na slici 2 odredite ulaznu impedanciju.



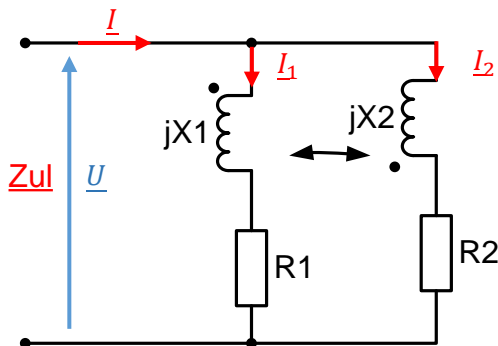
SLIKA 2

Rješenje:

Potrebno odrediti: \underline{Z}_{ul}

U slučaju postojanja međuinduktivnih veza ukupnu impedanciju mreže potrebno je odrediti pomoću Kirchhoffovih zakona za napone i struje, jer na ukupan pad napona na jednom svitku utječe i tok drugog svitka zbog međuinduktivne veze.

Pretpostavimo smjerove struja:



SLIKA 2

Treba primijetiti da struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 u ovom slučaju ne ulaze u istoimene stezaljke svitaka te se tokovi samoindukcije i međuindukcije odmažu. Zato će napon uslijed samoindukcije i napon uslijed međuindukcije na pojedinom svitku *biti suprotnog predznaka*.

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{U}{\underline{I}}$$

KZS:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

KZN1:

$$\underline{U} - R_1 \underline{I}_1 - jX_1 \underline{I}_1 + jX_m \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U} - (R_1 + jX_1) \underline{I}_1 + jX_m \underline{I}_2 = 0$$

KZN2:

$$R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 - R_2 \underline{I}_2 - jX_2 \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_1 = 0$$

$$(R_1 + jX_1) \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 - (R_2 + jX_2) \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_1 = 0$$

$$(R_1 + jX_1 + jX_m) \underline{I}_1 - (R_2 + jX_2 + jX_m) \underline{I}_2 = 0$$

Iz KZN2 možemo izraziti struju \underline{I}_1 pomoću struje \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = \frac{R_2 + j(X_2 + X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \underline{I}_2$$

Dobiveni izraz za \underline{I}_1 uvrstimo u KZN1:

$$\underline{U} - (R_1 + jX_1) \frac{R_2 + j(X_2 + X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U} = \left[\frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + j(X_2 + X_m))}{R_1 + j(X_1 + X_m)} - jX_m \right] \underline{I}_2$$

$$\underline{U} = \left[\frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1)jX_m}{R_1 + j(X_1 + X_m)} - jX_m \right] \underline{I}_2$$

$$\underline{U} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + \cancel{(R_1 + jX_1)jX_m} - \cancel{(R_1 + jX_1)jX_m} + X_m^2}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \underline{I}_2$$

$$\underline{U} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_m^2}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \underline{I}_2$$

Isti izraz za \underline{I}_1 uvrstimo u KZS:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{R_2 + j(X_2 + X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \underline{I}_2 + \underline{I}_2$$

$$\underline{I} = \left[\frac{R_2 + j(X_2 + X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} + 1 \right] \underline{I}_2$$

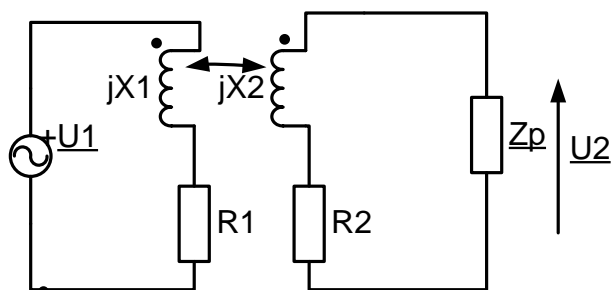
$$\underline{I} = \frac{R_2 + R_1 + j(X_1 + X_2 + 2X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} I_2$$

Sada imamo napon \underline{U} i struju \underline{I} izražene pomoću struje \underline{I}_2 te možemo odrediti njihov omjer, odnosno traženu ulaznu impedanciju mreže:

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_m^2}{R_1 + j(X_1 + X_m)} I_2}{\frac{R_2 + R_1 + j(X_1 + X_2 + 2X_m)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} I_2}$$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_m^2}{R_2 + R_1 + j(X_1 + X_2 + 2X_m)}$$

AV_11-Z_3: Za spoj na slici 3 odredite omjer $\underline{U}_2/\underline{U}_1$? Koliki je taj omjer za $R_1=R_2=0$? Koliki je omjer za $\underline{Z}_p = \infty$ (otvorene stezaljke)?

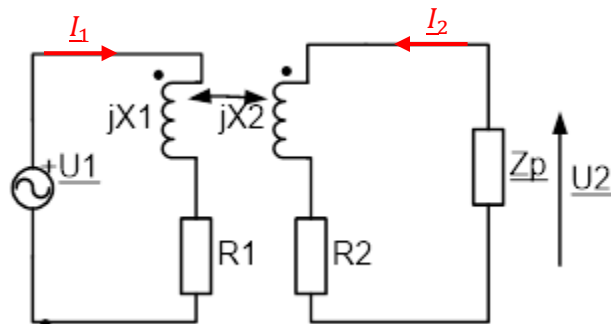


SLIKA 3

Rješenje:

Potrebno odrediti: $\underline{U}_2/\underline{U}_1$

Pretpostavimo smjerove struja i pišemo jednadžbe KZN-a za obje petlje:



Struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 ulaze u istoimene stezaljke svitaka.

KZNI:

$$\underline{U}_1 - R_1 \underline{I}_1 - jX_1 \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U}_1 - (R_1 + jX_1) \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 = 0$$

KZN2:

$$R_2 \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_p \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_1 = 0$$

$$(R_2 + jX_2 + \underline{Z}_p) \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_1 = 0$$

Prema odabiru smjera struje \underline{I}_2 definiramo napon \underline{U}_2 na sljedeći način:

$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_p \underline{I}_2$$

Iz KZN2 možemo izraziti struju \underline{I}_1 pomoću struje \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = -\frac{R_2 + jX_2 + \underline{Z}_p}{jX_m} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{R_2 + jX_2 + \underline{Z}_p}{X_m} \underline{I}_2$$

Izraz za struju \underline{I}_1 uvrstimo u KZNI:

$$\underline{U}_1 - (R_1 + jX_1) \cdot j \frac{R_2 + jX_2 + \underline{Z}_p}{X_m} \underline{I}_2 - jX_m \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U}_1 = \left[j(R_1 + jX_1) \frac{R_2 + jX_2 + \underline{Z}_p}{X_m} + jX_m \right] \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_1 = j \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1)\underline{Z}_p + X_m^2}{X_m} \underline{I}_2$$

Sada su naponi \underline{U}_1 i \underline{U}_2 izraženi pomoću struje \underline{I}_2 pa možemo odrediti njihov omjer:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\cancel{\underline{Z}_p}}{j \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1)\underline{Z}_p + X_m^2}{X_m} \cancel{\underline{I}_2}}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jX_m \underline{Z}_p}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1)\underline{Z}_p + X_m^2}$$

a) Poseban slučaj: $R_1 = R_2 = 0$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jX_m \underline{Z}_p}{X_m^2 - X_1 X_2 + jX_1 \underline{Z}_p}$$

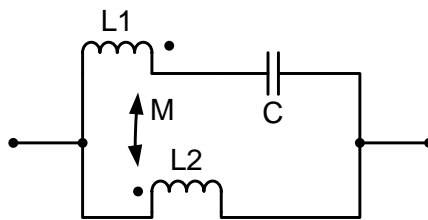
b) Poseban slučaj: $\underline{Z}_p = \infty$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \lim_{\underline{Z}_p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{jX_m \underline{Z}_p}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1)\underline{Z}_p + X_m^2} \right\}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \lim_{\underline{Z}_p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{jX_m}{\cancel{\frac{1}{\underline{Z}_p}}(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (R_1 + jX_1) + \cancel{\frac{1}{\underline{Z}_p}}X_m^2} \right\}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jX_m}{R_1 + jX_1}$$

AV_11-Z_4: Odredite koeficijent međuindukcije između svitaka pri kojem će u krugu na slici 4 nastati strujna rezonancija. Induktiviteti svitaka su $L_1 = 40 \text{ mH}$ i $L_2 = 20 \text{ mH}$. Kružna frekvencija izvora koji napaja cijeli krug je $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Kapacitet kondenzatora je $C = 0,2857 \text{ }\mu\text{F}$.



SLIKA 4

Rješenje:

Poznati podaci: $L_1 = 40 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $C = 0,2857 \text{ }\mu\text{F}$

Potrebno odrediti: k

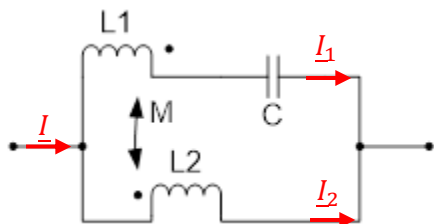
Koeficijent međuinaktivcije između svitaka se definira na sljedeći način:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, 0 \leq k \leq 1$$

Ako izraz za koeficijent međuinaktivcije između svitaka proširimo s ω/ω dobivamo:

$$k = \frac{\omega M}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{X_m}{\sqrt{X_1 X_2}}$$

Ukoliko odredimo izraz za ukupnu impedanciju kruga danog na slici 4 te postavimo uvjet za rezonanciju, možemo odrediti potrebnu međuinaktivtnu reaktanciju X_m da bi krug bio u rezonanciji. Uz poznate X_1, X_2 i X_m moguće je odrediti koeficijent međuinaktivcije između svitaka.



Za krug na slici pišemo KZS i KZN:

KZS:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

KZN:

$$jX_1 \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 - jX_C \underline{I}_1 = jX_2 \underline{I}_2 - jX_m \underline{I}_1$$

$$j(X_1 - X_C) \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2 = jX_2 \underline{I}_2 - jX_m \underline{I}_1$$

Iz KZN moguće je izraziti struju \underline{I}_2 pomoću struje \underline{I}_1 :

$$j(X_1 - X_C + X_m) \underline{I}_1 = j(X_2 + X_m) \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = \frac{X_1 - X_C + X_m}{X_2 + X_m} \underline{I}_1$$

Napon na spoju:

$$\underline{U} = j(X_1 - X_C) \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_2$$

$$\underline{U} = j(X_1 - X_C) \underline{I}_1 - jX_m \frac{X_1 - X_C + X_m}{X_2 + X_m} \underline{I}_1$$

$$\underline{U} = j \left[X_1 - X_C - X_m \frac{X_1 - X_C + X_m}{X_2 + X_m} \right] I_1$$

$$\underline{U} = j \frac{X_1 X_2 + \cancel{X_m X_1} - X_2 X_C - \cancel{X_m X_C} + \cancel{X_m X_1} + \cancel{X_m X_C} - X_m^2}{X_2 + X_m} I_1$$

$$\underline{U} = j \frac{X_1 X_2 - X_2 X_C - X_m^2}{X_2 + X_m} I_1$$

$$\underline{U} = j \frac{(X_1 - X_C) X_2 - X_m^2}{X_2 + X_m} I_1$$

Struja na spoju:

$$\underline{I} = I_1 + I_2 = I_1 + \frac{X_1 - X_C + X_m}{X_2 + X_m} I_1$$

$$\underline{I} = \frac{X_2 + X_m + X_1 - X_C + X_m}{X_2 + X_m} I_1$$

$$\underline{I} = \frac{X_1 + X_2 + 2X_m - X_C}{X_2 + X_m} I_1$$

Ukupna impedancija:

$$\underline{Z}_{uk} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{j \frac{(X_1 - X_C) X_2 - X_m^2}{X_2 + X_m} I_1}{\frac{X_1 + X_2 + 2X_m - X_C}{X_2 + X_m} I_1}$$

$$\underline{Z}_{uk} = j \frac{(X_1 - X_C) X_2 - X_m^2}{X_1 + X_2 + 2X_m - X_C}$$

Uvjet rezonancije: $\text{Im}\{\underline{Z}_{uk}\} = 0$

$$(X_1 - X_C) X_2 - X_m^2 = 0$$

$$X_m^2 = (X_1 - X_C) X_2$$

$$X_m = \sqrt{(X_1 - X_C) X_2}$$

Uvrštavanje poznatih vrijednosti daje:

$$\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}, L_1 = 40 \text{ mH} \Rightarrow X_1 = 400 \Omega$$

$$\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}, L_2 = 20 \text{ mH} \Rightarrow X_2 = 200 \Omega$$

$$\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}, C = 0,2857 \text{ }\mu\text{F} \Rightarrow X_C = 350 \text{ }\Omega$$

$$X_m = \sqrt{(X_1 - X_C)X_2} = 100 \text{ }\Omega$$

Koeficijent međuindukcije između svitaka:

$$k = \frac{X_m}{\sqrt{X_1 X_2}} = 0,354$$

$$k = 0,354$$