

Osnove elektrotehnike 2

Auditorne vjebe 12: Transformator

Tin Benšić
tin.bensic@ferit.hr

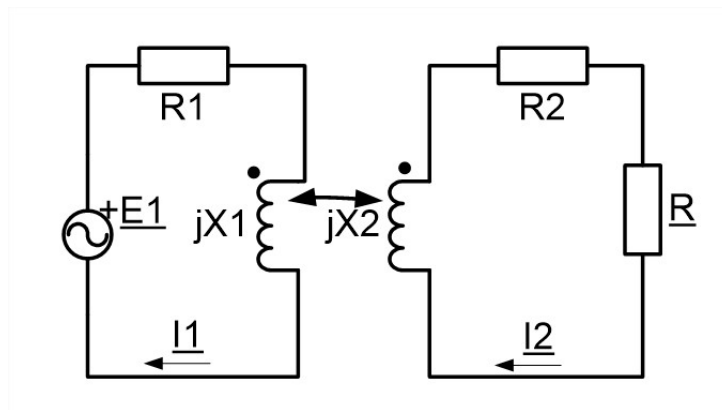
1 Teoretski podsjetnik

U ovom AV-u teoretski podsjetnik nije izdvojen iz rješenja zadatka već se teoretska razmatranja nalaze uz postupak rješavanja.

2 Rješenja zadatka AV 12

2.1 Zadatak 1

(Kuzmanović 11.10, str.307): Transformator s jezgrom od izolatora ima sljedeće karakteristike: $E = 20$ V, $N_1 = 50$ zavoja, $N_2 = 500$ zavoja, $L_1 = 0.003$ H, $L_2 = 0.3$ H, $R_1 = 2$ Ω , $R_2 = 100$ Ω , $R = 200$ Ω , $k_1 = k_2 = 0.5$, $\omega = 1000$ rad/s. Odredite struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 .



Slika 1: Transformator zadatak 1.

Zadano je:

$$E = 20 \text{ V}$$

$$N_1 = 50 \text{ zavoja, } N_2 = 500 \text{ zavoja}$$

$$L_1 = 0.003 \text{ H, } L_2 = 0.3 \text{ H, } R_1 = 2 \text{ } \Omega, R_2 = 100 \text{ } \Omega$$

$$R = 200 \text{ } \Omega,$$

$$k_1 = k_2 = k = 0.5$$

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

Traži se:

$$\underline{I}_1, \underline{I}_2$$

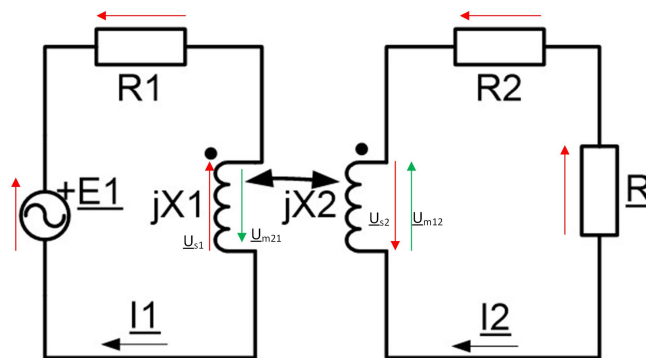
Rješenje zadatka:

Budući da transformator nije ništa drugo nego li dva međusobno magnetski vezana svitka, osnovni način rješavanja transformatora je koristeći se KZN i KZS za međuinaktivno vezane krugove.

Prvo se računa reaktancije svitaka transformatora i njihova međuinaktivna reaktancija:

$$\begin{aligned}X_{L1} &= \omega L_1 = 3 \Omega \\X_{L2} &= \omega L_2 = 300 \Omega \\X_M &= k\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = 15 \Omega\end{aligned}\quad (1)$$

Sada se može postaviti jednačbe KZN-a za spoj sa slike. Smjerovi struja su zadani, a s obzirom da struja \underline{I}_1 ulazi u točkicu, a struja \underline{I}_2 izlazi iz točkice pripadajućeg svitka zaključuje se da je međuinaktivna veza nesuglasna. To znači da je napon međuinaktivacije suprotnog smjera od napona samoindukcije, kako je naznačeno na slici.



Slika 2: Referentni smjerovi napona:

Jednačbe KZN-a su:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 - \underline{I}_1(R_1 + jX_{L1}) + \underline{I}_2jX_M &= 0 \\-\underline{I}_2(R + R_2 + jX_{L2}) + \underline{I}_1jX_M &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Dobili smo sustav dvije jednačbe s dvije nepoznanice (\underline{I}_1 i \underline{I}_2) te njegovim rješavanjem dolazimo do iznosa:

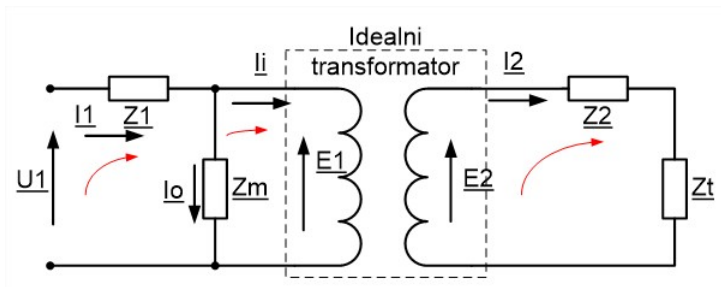
$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= 3.79 - j4.19 = 5.64e^{-j47.86^\circ} \\ \underline{I}_2 &= 0.2 - j9.98 \times 10^{-3} = 0.2e^{-j2.86^\circ}\end{aligned}$$

2.2 Zadatak 2

(Kertsing 7.1, str.150): Jednofazni realni transformator nazivne snage 75 kVA, 2400/240 V, ima sljedeće parametre: $\underline{Z}_1 = 0.612 + j1.2 \Omega$, $\underline{Z}_2 = 0.0061 + j0.0115 \Omega$ i $\underline{Y}_m = 1.92 \times 10^{-4} - j8.52 \times 10^{-4} \text{ S}$. Poprečna admitancija \underline{Y}_m je svedena na primarnu stranu. Odredite struju sekundara kada se na transformator priključi trošilo snage 75 kVA s faktorom snage od 0.9 induktivno.

Zadano je:

$$\begin{aligned}S_n &= 75 \text{ kVA} \\U_{1n}/U_{2n} &= 2400/240 \text{ V} \\ \underline{Z}_1 &= 0.612 + j1.2 \Omega, \underline{Z}_2 = 0.0061 + j0.0115 \Omega\end{aligned}$$



Slika 3: Nadomjesna shema realnog transformatora

$$\underline{Y}_m = 1.92 \times 10^{-4} - j8.52 \times 10^{-4} \text{ S}$$

$$S_2 = 75 \text{ kVA}, \cos \phi_2 = 0.9$$

Traži se:

$$\underline{I}_2$$

Rješenje zadatka:

Prije nego se krene rješavati zadatak, potrebno se podsjetiti značenja zadanih pojmova. Parametri nadomjesne sheme transformatora su uzdužna impedancija primara i sekundara (\underline{Z}_1 i \underline{Z}_2 , te poprečna admitancija koja predstavlja matematički model magnetiziranja (\underline{Y}_m). Prijenosni omjer transformatora (magnetsku vezu) moguće je prikazati pomoću matematičkog modela *idealnog transformatora*, koji samo predstavlja vezu između dvije naponske razine.

Nadalje, ako kažemo da transformator ima nazivne podatke, onda tu označavamo kombinaciju fizikalnih veličina napona, struje, snaga, faktora snaga, korisnosti prema kojima je transformator kao uređaj dimenzioniran. Ti podaci se otiskuju na natpisnoj pločici i proizvođač garantira da će se, narinemo li na transformator nazivni napon primara i nazivno opterećenje na sekundar, pojaviti nazivne struje i snage transformatora. Dakle to nam je jedna radna točka koju onda možemo koristiti u proračunima.

Naravno, transformator ne mora i u praksi skoro nikada neće raditi u nazivnoj radnoj točki, već se naponi primara i sekundara mijenjaju, a mijenja se i opterećenje koje se na transformator spaja. Ako se poznaje nadomjesna shema transformatora, tada se može i izračunati koja će se kombinacija struja, napona i snaga pojaviti pri bilo kojem iznosu narinutog napona i opterećenja na transformator.

U tekstu zadatka dani su nazivni napon i nazivna snaga. To je iznos prividne snage koju transformator prenosi sa primara na sekundar ako je priključen na nazivni napon i nazivno opterećenje.

U drugom djelu zadatka rečeno je da je na transformator priključeno trošilo snage 75 kVA, te je dan dodatni podatak da je faktor snage 0.9 induktivno. To nam govori kolika je snaga razvijena na trošilu (\underline{Z}_t), kada je na sekundaru transformatora nazivni napon, tj. dana je još jedna radna točka.

Ako se razumije pojmove lako se rješava zadatak:

Prvo računamo sve podatke koji su dostupni iz zadanih vrijednosti:

Prijenosni omjer:

$$n = \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = 10$$

Impedanciju tereta:

$$Z_t = \frac{U_{2n}^2}{S_t} = 0.768 \Omega$$

Kompleksnu impedanciju tereta:

$$\underline{Z}_t = Z_t \cos \phi + j\underline{Z}_t \sin \phi = 0.369 + j0.33 \Omega$$

Napišimo sada sve jednadžbe električne mreže transformatora koja je prikazana shemom. Uz klasično korištenje KZN-a i KZS-a, sada se još dodaje i jednadžbe idealnog transformatora:

KZN:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_0 \underline{Z}_m &= 0 \\ \underline{E}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_t &= 0 \\ \underline{I}_0 \underline{Z}_m - \underline{E}_1 &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

KZS:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_i - \underline{I}_0 = 0 \quad (4)$$

Idealni transformator:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 &= n\underline{E}_2 \\ n\underline{I}_i &= \underline{I}_2\end{aligned}\quad (5)$$

Sada kada imamo sve jednadžbe u interesu nam je izraziti struju \underline{I}_2 preko poznatih veličina, a to su svi elementi mreže (impedancije), prijenosni omjer i priključeni nazivni napon primara.

Počinja se sa trećom jednadžbom KZN-a, u kojoj \underline{E}_1 mjenjamo s $n\underline{E}_2$ iz jednadžbe idealnog transformatora, dobije se:

$$\underline{I}_0 = \frac{n\underline{E}_2}{\underline{Z}_m} = n\underline{E}_2 \underline{Y}_m$$

Sada u prvu jednadžbu KZN-a uvrstimo \underline{I}_1 iz jednadžbe KZS-a:

$$\underline{U}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_i - \underline{Z}_1 \underline{I}_0 - \underline{Z}_m \underline{I}_0 = 0$$

Te sada dobiveni izraz za \underline{I}_0 uvrstimo u ovu jednadžbu:

$$\underline{U}_1 - \underline{I}_i \underline{Z}_1 - n\underline{E}_2 \underline{Y}_m \underline{Z}_1 - n\underline{E}_2 = 0$$

I sada se još možemo riješiti nepoznate struje \underline{I}_i korištenjem druge jednadžbe idealnog transformatora, $n\underline{I}_i = \underline{I}_2$:

$$\underline{U}_1 - \frac{\underline{I}_2}{n} \underline{Z}_1 - n\underline{E}_2 \underline{Y}_m \underline{Z}_1 - n\underline{E}_2 = 0$$

U jednadžbi su sada sve poznate vrijednosti i nepoznanica \underline{I}_2 koju se sada može lako izračunati

$$\underline{I}_2 = 269.41 - j138.64 = 302.98e^{-j27.23^\circ} \text{ A}$$

2.3 Zadatak 3.

(Felja 8.40, str.59): Jednofazni transformator nominalne snage 10 kVA i primarnog napona 220 V ima ove podatke: gubici praznog hoda pri nominalnom naponu su 50 W, gubici kratkog spoja pri nominalnoj struji su 150 W, struja praznog hoda iznosi 3% nominalne i napon kratkog spoja 8% nominalnog. Sekundarni napon je 110 V. Nacrtajte ekvivalentnu shemu transformatora reduciranog na primar i izračunajte vrijednosti elemenata nadomjesne sheme uz uvjet da su reducirani sekundarni otpori jednaki primarnima

Zadano je:

$$S_n = 10 \text{ kVA}$$

$$U_{1n} = 220 \text{ V}$$

$$U_{2n} = 110 \text{ V}$$

$$P_0 = 50 \text{ W}$$

$$P_k = 150 \text{ W}$$

$$i_0\% = 3\%$$

$$u_k\% = 8\%$$

Traži se:

$$R_1, R_2', X_{L1}, X_{L2}', R_0, X_m$$

Rješenje zadatka:

U ovom zadatku pojavljuju se novi pojmovi. To su gubici praznog hoda i kratkog spoja transformatora, te postotno zadane sturje. Osim toga pojavljuje se prvi puta rad s reduciranom shemom realnog transformatora. Prvo ćemo pojasniti pojam reducirane sheme transformatora. Naime, u prethodnom zadatku je dana shema kod koje se prijenosni omjer transformatora modelira pomoću idealnog transformatora. Kod rada s reduciranom shemom umjesto korištenja idealnog transformatora, njegove izraze $E_1 = nE_2$ i $I_2 = nI_1$ se ubacuje direktno u jednačbe sekundara te se tako dobiju reducirane veličine na sekundaru.

Sada možemo definirati reducirane veličine:

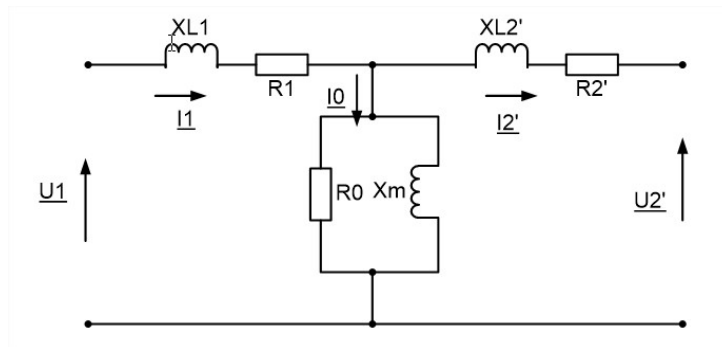
$$I_2' = \frac{1}{n} I_2 - \text{reducirana struja sekundara}$$

$$U_2' = n U_2 - \text{reducirani napon sekundara}$$

$$Z_2' = n^2 Z_2 - \text{reducirana impedancija sekundara}$$

Vrlo je važno napomenuti da se snaga sekundara ne mjenja primjenom redukcije!

Uvođenjem reduciranih veličina nadomjesna shema transformatora iz prethodnog zadatka se mjenja izbacivanjem idealnog transformatora te se dobiva sljedeća shema:



Slika 4: Reducirana nadomjesna shema realnog transformatora

Sa sheme, ako R_0 i X_m svedemo na poprečnu admitanciju Y_m možemo vidjeti da je broj jednačbi mreže smanjen sa 6 kako je to bilo u prošlom zadatku na 3 (2 kzn i 1 kzs), što uvelike olaksava računanje.

Definirajmo sada **stanje** praznog hoda i kratkog spoja:

- Transformator se nalazi u stanju praznog hoda kada je na jedan od svitaka narinut napon a na drugi spojena impedancija beskonačnog iznosa (odnosno, nije ništa spojeno, otvorene stezaljke)

- Transformator se nalazi u stanju kratkog spoja kada je na jedan od svitaka narinut napon a na drugi spojena impedancija iznosa 0 (odnosno, stezaljke su prespojene samo vodičem)

Definiramo sada **pokus** praznog hoda i kratkog spoja:

- Pokus praznog hoda se provodi tako da se na transformator koji se nalazi u stanju praznog hoda narine nazivni primarni napon. Tada se mjeri djelatna snaga primara i struja primara. Struja se označava sa $I_{ph} = i_0 I_{1n}$ te se izražava u omjeru na nazivnu struju primara. Izmjerena djelatna snaga se naziva gubicima u željezu ($P_{ph} = P_{fe}$) za koju se smatra da se u cjelosti troši na poprečnom otporu R_0 - uzdužne impedancije se zanemaruju!
- Pokus kratkog spoja se provodi tako da se na transformator koji se nalazi u stanju kratkog spoja narine takav primarni napon da u primarnom namotu poteče nazivna struja. Tada se mjeri djelatna snaga primara i napon primara. Napon se označava sa $U_{ks} = u_k U_{1n}$ te se izražava u omjeru na nazivni napon primara. Izmjerena djelatna snaga naziva se gubicima u bakru ($P_{ks} = P_{cu}$) i za nju se smatra da se u cjelosti troši na otporima R_1 i R_2' - poprečna admitancija se u cjelosti zanemaruje.

Pokus praznog hoda i kratkog spoja sa svojim izmjerenim veličinama nam u cjelosti omogućuje da odredimo parametre reducirane nadomjesne sheme transformatora.

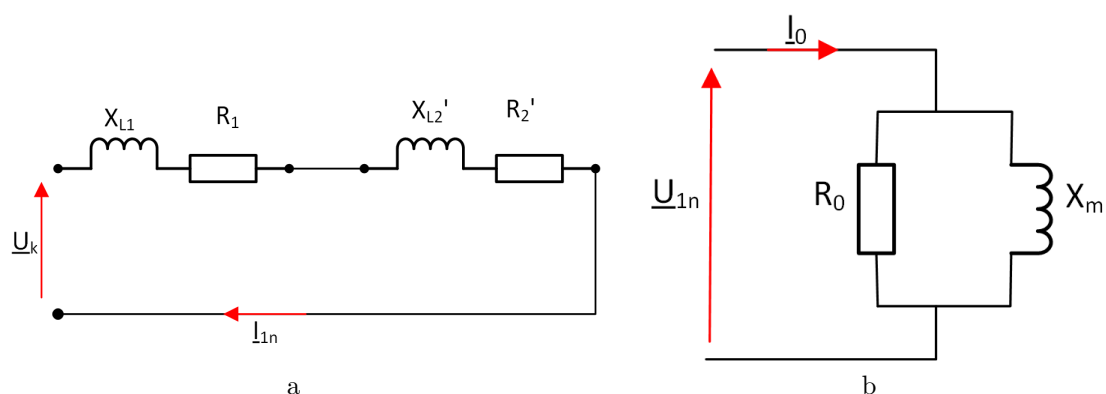
Prvo računamo podatke koje možemo dobiti iz zadanih vrijednosti:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{U_{1n}} = 45.45 \text{ A}, \quad I_{2n} = \frac{S_n}{U_{2n}} = 90.90 \text{ A}$$

$$U_{ks} = u_k U_{1n} = 0.08 \cdot 220 = 17.6 \text{ V}$$

$$I_{ph} = i_0 I_{1n} = 0.03 \cdot 45.45 = 1.36 \text{ A}$$

Sada na temelju zanemarenja definiranih u pokusu praznog hoda i kratkog spoja možemo nacrtati nadomjesne sheme za pokus praznog hoda i kratkog spoja. Ove sheme vrijede samo za **pokus** praznog hoda i kratkog spoja kada su struje i naponi takvih iznosa da zanemarenje ne utječu značajno na konacni rezultat!



Slika 5: Nadomjesna shema transformatora za pokus (a) kratkog spoja, (b) praznog hoda.

Kako se vidi sa sheme za pokus kratkog spoja, imamo 4 serijski spojena elementa kroz koje teče nazivna struja primara. Uz pretpostavku da je $R_2' = R_1$ vrijedi:

$$P_{ks} = P_{Cu} = I_{1n}^2 (R_1 + R_2') = 2R_1 I_{1n}^2$$

Te računamo odmah uzdužne otpore:

$$R_1 = R'_2 = \frac{P_{Cu}}{2I_{1n}^2} = \frac{150}{2 \cdot 45.45^2} = 0.0363 \Omega$$

Ukupnu uzdužnu impedanciju moguće je odrediti iz napona i struje u pokusu kratkog spoja:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ks} &= R_1 + R'_2 + j(X_{L1} + X'_{L2}) \\ Z_{ks} &= \frac{U_{ks}}{I_{1n}} = \frac{17.6}{45.45} = 0.387 \Omega \end{aligned}$$

Uz poznat ukupni iznos impedancije četiri serijski spojena elementa, moguće je odrediti i uzdužne reaktancije:

$$\begin{aligned} X_1 + X'_2 &= \sqrt{Z_{ks}^2 - (2R_1)^2} = \sqrt{0.387^2 - (2 \cdot 0.0363)^2} = 0.38 \Omega \\ X_1 = X'_2 &= \frac{1}{2}0.38 = 0.19 \Omega \end{aligned}$$

Sada su izračunati parametri uzdužne grane nadomjesne sheme transformatora. Preostaje još izračunati parametre poprečne grane. Uzdužna se računa iz pokusa kratkog spoja, a poprečna iz pokusa praznog hoda.

Prema nadomjesnoj shemi za pokus praznog hoda, jasno je da vrijedi:

$$P_{Fe} = \frac{U_{1n}^2}{R_0}$$

Odakle se direktno računa poprečna vodljivost $G_0 = \frac{1}{R_0}$.

$$G_0 = \frac{P_{Fe}}{U_{1n}^2} = \frac{50}{220^2} = 1.033 \text{ mS}$$

Iz Ohmovog zakona nalazi se ukupna poprečna admitancija:

$$Y_0 = \frac{I_{ph}}{U_{1n}} = \frac{1.36}{220} = 6.2 \text{ mS}$$

I poprečna susceptancija $B_m = \frac{1}{X_m}$ se računa pomoću admitancije i otpora:

$$B_m = \sqrt{Y_m^2 - G_0^2} = \sqrt{(6.2 \times 10^{-3})^2 - (1.033 \times 10^{-3})^2} = 6.11 \text{ mS}$$

Korisna napomena: Gubici u željezu određeni pokusom praznog hoda se javljaju uvijek kada je primar na nazivnom naponu. Analogno tome gubici u bakru određeni pokusom kratkog spoja se javljaju uvijek kada je struja nazivna!

2.4 Zadatak 4.

(Kuzmanović 12.12, str.326): Jednofazni transformator nominalne snage $S = 50 \text{ kVA}$ i $2300/230 \text{ V}$ ima $R_1 = 0.5 \Omega$ i $R_2 = 0.005 \Omega$ te gubitke u željezu $P_{Fe} = 290 \text{ W}$. Treba izračunati stupanj korisnog djelovanja za opterećenje: a) 50 kW , $\cos \phi_2 = 1$, b) 5 kW , $\cos \phi_2 = 1$ i c) 50 kVA , $\cos \phi_2 = 0,8$.

Zadano je:

$$\begin{aligned}
U_{1n} &= 2300 \text{ V}, U_{2n} = 230 \text{ V} \\
S_n &= 50 \text{ kVA} \\
R_1 &= 0.5 \Omega, R_2 = 0.005 \Omega \\
P_{Fe} &= 290 \text{ W}
\end{aligned}$$

Traži se:

η - za tri različita opterećenja.

Rješenje zadatka:

Ovaj zadatak rješava se pomoću bilance snaga transformatora. Već se u prošlom zadatku vidjelo da u transformatoru dolazi do gubitaka zbog toka struje kroz namote (gubici u bakru) i gubitaka zbog magnetiziranja jezgre (gubici u željezu). Izlazna snaga uvećana za gubitke mora dati ulaznu snagu. Omjer te dvije snage daje korisnost.

Kako je rečeno u prethodnom zadatku, gubici u željezu su jednaki onima izmjerenim u pokusu praznog hoda samo kada transformator radi pri nazivnom naponu. U ovom zadatku imamo taj slučaj za sva tri tereta. Ipak gubici u bakru se mijenjaju ovisno o struji tereta, te njih moramo računati svaki put.

Prvo pokazujemo postupak koji je jednak za sva tri slučaja:

Iz snage tereta i nazivnog napona računamo struju sekundara:

$$I_2 = \frac{S_t}{U_{2n}}$$

Sada pomoću prijenosnog omjera transformatora određujemo struju primara:

$$I_1 = \frac{1}{n} I_2$$

I s izračunatim strujama možemo onda računati i bilancu djelatne snage:

$$P_1 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + P_{Fe} + S_t \cos \phi_2$$

I na kraju korisnost je omjer dobivene i uložene snage:

$$\eta = \frac{S_t \cos \phi_2}{P_1}$$

Numerička rješenja daju se u sljedećoj tablici;

Veličina	a)	b)	c)
I_1 [A]	21.74	2.174	21.739
I_2 [A]	217.39	21.739	217.39
P_1 [kW]	50.762	5.29	40.762
η	0.985	0.944	0.981

2.5 Zadatak 5.

(Felja 8.42, str.60): Na transformatoru su obavljena mjerenja i rezultati su za prazni hod: $U_1 = 3530 \text{ V}$, $U_2 = 182 \text{ V}$, $P_0 = 198 \text{ W}$, a za kratki spoj: $I_k = 1,42 \text{ A}$ i $P_k = 159 \text{ W}$. Koliko je stupanj korisnog djelovanja za snagu sekundara od $P = 6 \text{ kW}$?

Zadano je:

$$\begin{aligned}
U_{1n} &= 3530 \text{ V}, U_{2n} = 182 \text{ V} \\
P_0 &= P_{Fe} = 198 \text{ W}
\end{aligned}$$

$$I_k = 1.42 \text{ A}, P_k = 159 \text{ W}$$
$$P_t = 6000 \text{ W}$$

Traži se:

η pri zadanom opterećenju.

Rješenje zadatka:

Ovaj zadatak se rješava u potpunosti analogno prethodnom. Jedina komplikacija je što nemamo zadane vrijednosti otpora namota. Naravno prema znanjima iz zadatka 3, moguće je otpore namota odrediti iz pokusa kratkog spoja.

Prvo određujemo otpore uzdužne impedancije transformatora:

$$R_1 + R'_2 = \frac{P_k}{I_k^2} = \frac{159}{1.42^2} = 78.85 \text{ } \Omega$$

Sada izračunavamo struju tereta na temelju podataka o opterećenju:

$$I_2 = \frac{P_t}{U_{2n}} = \frac{6000}{182} = 32.97 \text{ A}$$

Pomoću prijenosnog omjera transformatora računamo struju primara, što je ujedno i reducirana sekundarna struja:

$$I_1 = \frac{1}{n} I_2 = \frac{182}{3530} 32.97 = 1.699 \text{ A}$$

Te se sada pomoću bilance snaga izračunava i snaga primara:

$$P_1 = I_1^2 (R_1 + R'_2) + P_{Fe} + P_t = 6.426 \text{ kW}$$

Korisnost je omjer dobivene djelatne snage i uložene djelatne snage.

$$\eta = \frac{P_t}{P_1} = 0.934$$