6 Trigonometrija trokuta

Što ću naučiti?

- kako iz tri poznata elementa kosokutnog trokuta odrediti ostale njegove elemente
- rabiti džepno računalo pri određivanju vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastih i tupih kutova
- primjenjivati poučak o sinusima i poučak o kosinusu u raznim zadatcima iz geometrije
- primjenjivati poučak o sinusima i poučak o kosinusu na problem iz svakodnevnog života
- rabiti program dinamičke geometrije

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u digitalnoj inačici.

Projektiranje raznih niskogradnji i visokogradnji zahtijeva istraživanje terena na kojem će se gradnja izvoditi. Mjerenje terena potrebno je i iz brojnih drugih razloga. Provode ga geodeti, a jedan od neophodnih instrumenata kojim se pritom koriste je teodolit – sprava za mjerenje kutova u triangulacijskoj mreži. U raznim drugim strukama, kao što su primjerice pomorstvo ili astronomija, za mjerenje kutova rabe se i neki drugi instrumenti. Na jednoj staroj slici vidimo jedan od njih – sekstant služi za mjerenje tzv. kutne visine nebeskih tijela, prije svega Sunca i Mjeseca.

Određivanje kutova ponekad je samo dio posla iza kojega slijedi računanje udaljenosti između dviju danih točaka. Pritom se sav taj račun uglavnom svodi na "rješavanje trokuta".

Riješiti trokut znači 'iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente'. Osnovni su elementi trokuta njegove stranice i kutovi. Da bismo mogli odrediti nepoznate elemente, najprije moramo otkriti kakve veze postoje između tih elemenata. Temeljne veze između stranica i kutova u trokutu iskazane su dvama **poučcima***: poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu, koje ćemo proučiti u ovom poglavlju.*

U uvodnom ćemo se dijelu prisjetiti definicije trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova u pravokutnom trokutu i poopćiti te definicije na bilo koje kutove po volji odabranog trokuta.

6.1. Trigonometrijske funkcije kutova u trokutu

Trigonometrijske funkcije kuta u pravokutnom trokutu

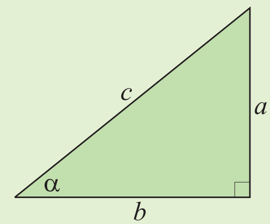
U pravokutnom trokutu jedan kut ima mjeru $90°$, a dva preostala kuta su *šiljasta*, njihova je mjera manja od $90°$. Označimo vrhove, stranice i kutove u trokutu na uobičajeni način. Definirali smo *trigonometrijske funkcije šiljastog kuta* u pravokutnom trokutu na sljedeći način.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta u pravokutnom trokutu

Sinus, **kosinus**, **tangens** i **kotangens** kuta α definirani su omjerima duljina stranica u pravokutnom trokutu:

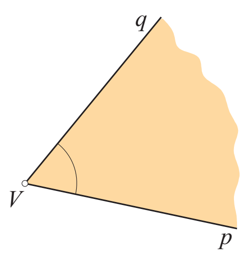
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

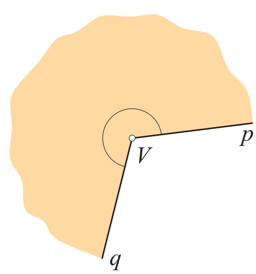
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Zadatak 1. Odredi vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova α i β u pravokutnom trokutu kojemu su katete $a = 2$ cm i $b = 3$ cm.

Želimo definirati trigonometrijske funkcije za kutove po volji odabranog trokuta. Oni mogu imati mjere od 0° do 180°. Stoga je korisno pojam kuta i trigonometrijske funkcije tog kuta promotriti u općenitoj situaciji.

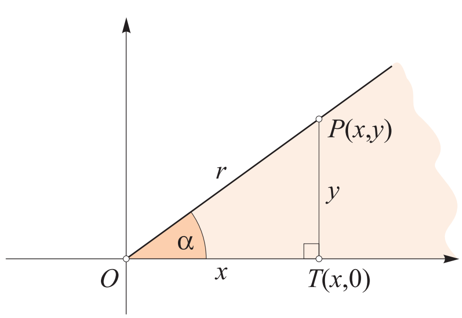




Kut je dio ravnine određen dvjema zrakama (polupravcima) sa zajedničkim početkom. Pritom označavamo (lukom ili na koji drugi način) na koji dio ravnine određen tim parom zraka mislimo.

Mjera kuta je pozitivan broj, između 0° i 360°. Ovisno o tome kolika im je mjera, za neke smo kutove govorili da su šiljasti, pravi, tupi, ispruženi, izbočeni i puni.

Promatrat ćemo kutove s mjerom od 0° do 180° pa ćemo radi toga od dvaju kutova određenih polupravcima uvijek uzimati onaj manje mjere.



Neka je α bilo koji šiljasti kut. Nacrtajmo ga u gornjoj poluravnini tako da mu vrh bude u ishodištu koordinatnog sustava, a os Ox jedan od polupravaca koji određuju kut. Na drugom polupravcu uzmimo bilo koju točku P. Njezine koordinate označimo sa x i y.

Udaljenost točke P do ishodišta označimo sa r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

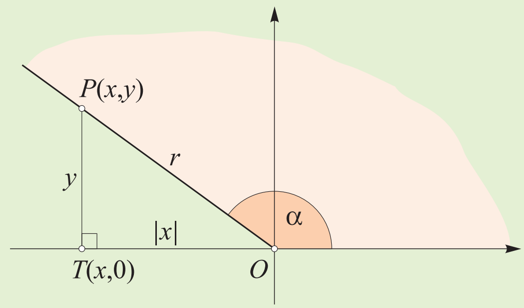
Iz pravokutnog trokuta OTP čitamo:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Neka je sad α tupi kut. Onda se točka P nalazi u drugom kvadrantu. Sinus i kosinus ovog kuta definirat ćemo na identičan način.

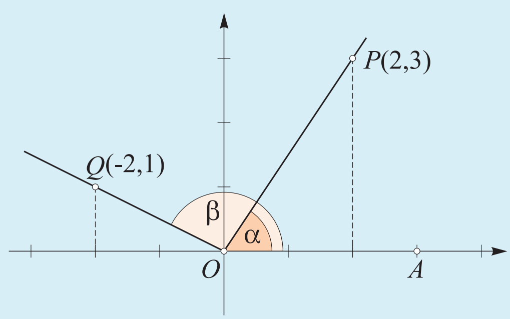
Sinus i kosinus kuta

Neka je točka $P(x,y)$ na drugom polupravcu kuta α i r udaljenost te točke do ishodišta. Onda definiramo



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Primjer 1. Zadane su točke $P(2,3)$ i $Q(-2,1)$. Odredimo sinus i kosinus kutova α i β prema slici



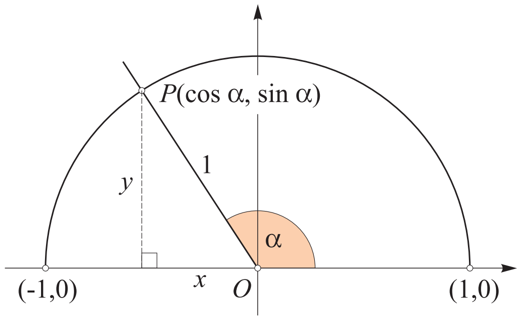
Za kut $\alpha = \sphericalangle AOP$ imamo $r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ pa je

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Za kut $\beta = \sphericalangle AOQ$ imamo $r=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ pa vrijedi

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Kut β je tup. Apscisa točke Q je negativna, pa je i kosinus ovog kuta također negativan.



Nacrtajmo polukružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka je $P(x, y)$ bilo koja točka te polukružnice. Ta točka određuje kut α.

Udaljenost točke P od ishodišta je 1 pa prema definicijama trigonometrijskih funkcija vrijedi

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha.$$

Dakle, koordinate točke P su vrijednosti kosinusa i sinusa kuta α pa je $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Budući da je $x^2 + y^2 = 1$, za svaki je kut α

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Primjer 2. Odredimo sinus i kosinus sljedećih kutova: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 160^\circ$.

Računanje sinusa i kosinusa s pomoću definicije nije uvijek moguće učiniti. Razlog tome je što ne znamo uvijek izračunati koordinate točke P koja određuje zadani kut. U ovom primjeru to možemo učiniti za kut α. Krak ovog kuta je simetrala prvog kvadranta pa mu je jednadžba $y = x$. To znači da će svaka točka s jednakim koordinatama ležati na tom pravcu. Uzmemo li primjer točku $P(1, 1)$, onda je

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Koordinate točke koja određuje kut β nije moguće odrediti na ovakav način. Sinus kuta možemo odrediti isključivo uporabom računala. Postupak smo naučili u prvom razredu.

Računamo sinus kuta 80°.

1. Provjerimo je li računalo u modu za računanje sa stupnjevima. Ako nije, pritisnemo tipku DEG ili njezin ekvivalent.
2. Unesemo podatak 80: 8 0 .
3. Pritisnemo tipku SIN . Na zaslonu džepnog računala pojavit će se broj 0.984807753 koji uobičajeno zaokružujemo na četiri značajne znamenke: $\sin 80^\circ = 0.9848$.

Na novijim računalima sa simboličkim zapisom poredak računanja može biti obrnut: najprije se odabere tipka za funkciju, a onda unese podatak o kutu. Provjerite na svom računalu i izračunajte sljedeće dvije vrijednosti:

$$\sin 45^\circ = 0.7071, \qquad \sin 160^\circ = 0.3420.$$

Na isti način određujemo vrijednosti kosinusa:

$$\cos 45^\circ = 0.7071, \qquad \cos 80^\circ = 0.1736, \qquad \cos 160^\circ = -0.9397.$$

Kosinus tupog kuta je, naravno, negativan.

Džepna računala posjeduju tri tipke za računanje sinusa, kosinusa i tangensa zadanog kuta. Vrijednost kotangensa računa se s pomoću tangensa jer je

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Dakle, kotangens računamo tako da najprije odredimo tangens, a onda pritisnemo tipku $1/x$ za računanje recipročne vrijednosti.

Zadatak 2. Prepiši u bilježnicu i popuni sljedeću tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Rezultate zapisuj s četirima decimalama. Radi kontrole unesene su neke točne vrijednosti:

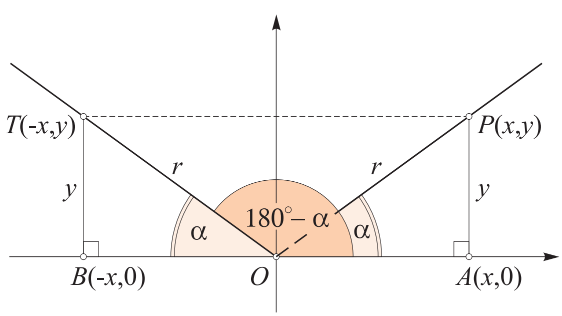
	sin	cos	tg	ctg
20°		0.9397		
50°			1.1918	
80°				
110°				−0.3640
140°				
170°				

Suplementarni kutovi

Dva su kuta α i β **suplementarna** ako zajedno čine ispruženi kut:

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Dakle, suplementaran kut kutu α je $(180° - \alpha)$. Pri tom α može biti bilo koji, šiljasti ili tupi kut.



sinus i kosinus suplementarnih kutova.

Na slici su nacrtana dva suplementarna kuta. Neka je $\alpha = \sphericalangle AOP$ i neka su (x, y) koordinate točke P. Označimo na drugom kraku kuta $180° - \alpha$ točku T s ordinatom y i neka je B njezina projekcija na os apscisa. Trokuti AOP i BOT su sukladni jer se podudaraju u kutovima i stranici duljine y. To znači da je $|OB| = |OA| = x$ pa su $(-x, y)$ koordinate točke T. Sad imamo

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha.$$

Za tangens i kotangens suplementarnih kutova imamo

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Trigonometrijske funkcije nekih posebnih kutova

U prvom smo razredu naučili određivati točne vrijednosti sinusa, kosinusa, tangensa i kotangensa za kutove $30°$, $45°$ i $60°$. Primjerice

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ako je to prikladno, ove se vrijednosti ne pretvaraju u decimalni broj već ih pišemo u ovom obliku.

Koristeći svojstvo suplementarnih kutova, tablicu istaknutih vrijednosti proširujemo i na kutove $120°$, $135°$, $150°$:

$$\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Slično određujemo i vrijednosti kosinusa, a onda iz sinusa i kosinusa računamo tangens i kotangens. Primjerice:

$$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Često će nam trebati vrijednosti u sljedećoj tablici:

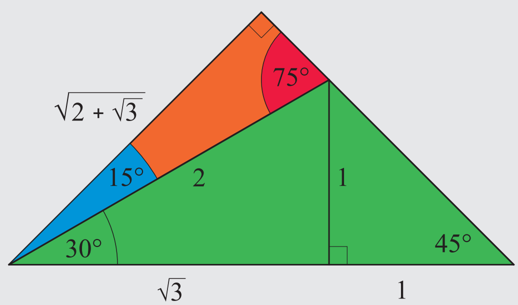
	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Desna polovica gornje tablice može se zapamtiti iz lijeve i svojstva suplementnih kutova.

Ovoj tablici dodat ćemo i vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova $0°$, $90°$ i $180°$. Sinus i kosinus bilo kojeg kuta uvijek su dobro definirane vrijednosti, što nije slučaj s tangensom i kotangensom.

	$0°$	$90°$	$180°$
sin	0	1	0
cos	1	0	-1
tg	0	ne postoji	0
ctg	ne postoji	0	ne postoji

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE KUTOVA OD $15°$ i $75°$



Računanje s minutama i sekundama

Prisjetimo se i računanja kutova zadanih u stupnjevima, minutama i sekundama.

S obzirom na to da džepno računalo računa vrijednosti trigonometrijskih funkcija koje su unesene **u stupnjevima**, prije računa potrebno je pretvoriti minute i sekunde u odgovarajući dio stupnja. Taj postupak provodimo uporabom džepnog računala.

Primjer 3. Odredimo sinus i kosinus sljedećih kutova: $15°23'31''$, $72°1'50''$, $130°12'5''$.

Podatke treba unijeti na ovaj način:

stupnjevi . minute sekunde .

Minute i sekunde uvijek se unose s dvjema decimalama. U ovom ćemo primjeru napisati:

1 5 . 2 3 3 1

7 2 . 0 1 5 0

1 3 0 . 1 2 0 5

Tipka za pretvaranje ovih vrijednosti u stupnjeve na različitim je računalima označena na različite načine. Obično je to →HR ili °′″ → ili →DEG .
Provjerite usporedbom s ovim vrijednostima:

$$
\begin{aligned}
15°23'31'' &= 15.39194444° \\
72°1'50'' &= 72.03055556° \\
130°12'5'' &= 130.20138889°
\end{aligned}
$$

Dobivene rezultate ne zapisujemo, već odmah nastavljamo s računanjem vrijednosti trigonometrijskih funkcija (zapamtivši rezultat u spremnik računala):

$$
\begin{aligned}
\sin(15°23'31'') &= 0.265421 \qquad & \cos(15°23'31'') &= 0.964133 \\
\sin(72°1'50'') &= 0.951221 \qquad & \cos(72°1'50'') &= 0.308510 \\
\sin(130°12'5'') &= 0.763780 \qquad & \cos(130°12'5'') &= -0.645476
\end{aligned}
$$

Rezultat moramo zapisivati sa šest znamenaka jer se primjerice vrijednost sinusa kuta $15°23'32''$ razlikuje od vrijednost sinusa kuta $15°23'31''$ u šestoj decimali.

Određivanje kuta

Poznata nam je vrijednost trigonometrijske funkcije nekog kuta α. Kolika je mjera tog kuta?

Pri određivanju kuta svaka od trigonometrijskih funkcija ima svoje posebnosti pa ćemo opisati račun detaljno, za svaku pojedinu funkciju.

Određivanje kuta iz poznatog kosinusa

U ovom se slučaju možemo pouzdati u vrijednost koju će nam dati računalo. Ako je kosinus pozitivan, dobit ćemo kut s mjerom $0° < \alpha < 90°$. Ako je kosinus negativan, mjera kuta nalazit će se u granicama $90° < \alpha < 180°$.

Primjer 4. Odredimo kutove α i β ako vrijedi $\cos\alpha = 0.2$, $\cos\beta = -0.4323$.

Broj 0.2 uzimamo kao *točnu vrijednost* kosinusa pa ćemo rezultat potražiti do na sekunde kuta. Unesemo vrijednost u računalo i pritisnemo tipku označenu sa $\boxed{\cos^{-1}}$ ili $\boxed{\mathrm{ACOS}}$ ili pak kombinaciju $\boxed{\mathrm{INV}}$ $\boxed{\cos}$, ovisno o vrsti računala:

$$0.2\ \boxed{\cos^{-1}} = 78.463041.$$

Dobivena je vrijednost kuta *u stupnjevima*. Uobičajeno je pretvoriti taj broj u seksagezimalni sustav s pomoću tipke označene sa $\boxed{\rightarrow \mathrm{DMS}}$, $\boxed{\rightarrow {}^{\circ}\,{}'\,{}''}$ ili sličnom oznakom:

$$\boxed{\rightarrow \mathrm{DMS}} = 78^{\circ}27'47''.$$

Dakle, $\alpha = 78^{\circ}27'47''$. Provjeri ovaj račun na svom računalu.

U drugom slučaju dobivamo

$$-0.4323\ \boxed{\cos^{-1}} = 115.613613\ \boxed{\rightarrow \mathrm{DMS}} = 115^{\circ}37'.$$

Vrijednost -0.4323 nalikuje na približnu vrijednost kosinusa (danu tima četirima decimalama) pa u rezultatu ne zapisujemo sekunde. Za određivanje sekunda vrijednost funkcije mora biti ili točna ili dana s točnošću od barem šest decimala. Dakle, $\beta = 115^{\circ}37'$.

Određivanje kuta iz poznatog sinusa

Sinus šiljastog i tupog kuta uvijek je pozitivan pa će jednadžba

$$\sin\alpha = p$$

imati dva rješenja, za $0 < p < 1$. Računalo će dati mjeru kuta koja se nalazi unutar intervala $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Tražimo li tupi kut, onda je riječ o suplementu ovog kuta.

Primjer 5. Odredimo kut α ako je poznato $\sin\alpha = 0.323412$.

Račun izgleda ovako:

$$0.323412\ \boxed{\sin^{-1}} = 18.869394\ \boxed{\rightarrow \mathrm{DMS}} = 18^{\circ}52'10''.$$

Dobiveni je kut šiljast. Ako rješenje koje tražimo odgovara tupom kutu, onda trebamo računati suplement:

$$180^{\circ} - 18^{\circ}52'10'' = 161^{\circ}7'50''.$$

Rješenje je jedan od sljedećih dvaju kutova, $\alpha_1 = 18^{\circ}52'10''$, $\alpha_2 = 161^{\circ}7'50''$.

Suplement se treba računati prije pretvorbe u segzadecimalni sustav. U ovom bi primjeru završetak računa bio:

$$18.869394 \;\boxed{+/-}\; \boxed{+}\; 180 \;\boxed{=}\; \boxed{\rightarrow\text{DMS}} = 161°7'50''$$

Ovdje je $\boxed{+/-}$ tipka za promjenu predznaka.

Određivanje kuta iz poznatog tangensa

Ako je vrijednost tangensa pozitivna, onda je kut šiljast i računalo će dati njegovu mjeru. Ako je vrijednost tangensa negativna, onda je kosinus negativan pa je traženi kut tup. Međutim. rezultat na računalu neće biti mjera tog kuta, već će računalo dati kao rezultat *negativnu* mjeru nekog kuta. Stoga taj rezultat trebamo prevesti u traženi, kako je pokazano u sljedećem primjeru.

Primjer 6. Odredimo kut α ako je poznato $\operatorname{tg}\alpha = -2.13425$.

Kut α je tup jer je tangens negativan. Neka je $\beta = 180° - \alpha$ njegov suplement. Onda je $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha = 2.13425$. Sad možemo odrediti kut β pa onda i njegov suplement α:

$$2.13425 \;\boxed{\text{TG}^{-1}} = 64.89462 \;\boxed{+/-}\; \boxed{+}\; 180 \;\boxed{=}\; \boxed{\rightarrow\text{DMS}} = 115°6'19'' = \alpha.$$

Možemo postupati i ovako. Upišemo li početnu negativnu vrijednost u računalo i pritisnemo $\boxed{\text{TG}^{-1}}$, dobit ćemo rezultat $-\beta$ pa ne moramo koristiti tipku za promjenu predznaka. Toj vrijednosti treba dodati $180°$:

$$-2.13425 \;\boxed{\text{TG}^{-1}} = -64.89462 \;\boxed{+}\; 180 \;\boxed{=}\; \boxed{\rightarrow\text{DMS}} = 115°6'19'' = \alpha.$$

Određivanje kuta iz poznatog kotangensa

Kotangens se u računalu računa preko tangensa. Zato moramo najprije odrediti vrijednost tangensa, a potom traženi kut.

Primjer 7. Odredimo kut α ako je zadano $\operatorname{ctg}\alpha = -0.1$.

Traženi kut je tup. Vrijednost tangensa je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ pa račun izgleda ovako:

$$-0.1 \;\boxed{1/x}\; \boxed{\text{TG}^{-1}} = -84.289407 \;\boxed{+}\; 180 \;\boxed{=}\; \boxed{\rightarrow\text{DMS}} = 95°42'38'' = \alpha.$$

RAČUNANJE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Za malen broj kutova poznajemo točnu vrijednost trigonometrijskih funkcija. U principu, ne računajući kutove 0°, 90° i 180°, koristimo točne vrijednosti samo za tri kuta, 30°, 45° i 60° (i njihove suplemente).

Koliki je sinus kuta 52°? Rezultat se ne može napisati s konačno mnogo decimala niti korištenjem korijena. Zato ga možemo zapisati samo s približnom točnošću. Koliko ćemo decimala odabrati?

Ispravan odgovor na to pitanje možemo dati tek znamo li odgovor na pitanje: *s kolikom je pouzdanošću određen kut?*

Koliki je sinus kuta $52^\circ 36' 12''$? Sad je jasno da je kut određen do na mjeru sekunde pa onda i odgovor moramo dati s istom preciznošcu. To u ovom slučaju znači odgovor na šest decimala. Pogledajmo zašto.

Izračunajmo sinus triju susjednih kutova koji se razlikuju u jednoj sekundi:

$$\sin(52^\circ 36' 11'') = 0.7944764539$$

$$\sin(52^\circ 36' 12'') = 0.7944793981$$

$$\sin(52^\circ 36' 13'') = 0.7944823423$$

Vidimo da se ove vrijednosti razlikuju za otprilike $3 \cdot 10^{-6}$, odnosno, u šestoj decimali. Zato rezultat trebamo zapisati sa šest decimala.

Prije pojave računala u uporabi su bile tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija. U njima su vrijednosti bile dane uglavnom sa šest decimala. To je bilo dovoljno za određivanje kutova do točnosti od $1''$. Sav račun s trigonometrijskim funkcijama (pa i u srednjoj školi) odvijao se uz pomoć tih tablica. Primitivne verzije trigonometrijskih tablica poznate su još od doba sumerske matematike.

	34°				**35°**				
′	sin	tg	ctg	cos	sin	tg	ctg	cos	
0	0.55919	0.67451	1.48256	0.82904	0.57358	0.70021	1.42815	0.81915	**60**
1	0.55943	0.67493	1.48163	0.82887	0.57381	0.70064	1.42726	0.81899	59
2	0.55968	0.67536	1.48070	0.82871	0.57405	0.70107	1.42638	0.81882	58
3	0.55992	0.67578	1.47977	0.82855	0.57429	0.70151	1.42550	0.81865	57
4	0.56016	0.67620	1.47885	0.82839	0.57453	0.70194	1.42462	0.81848	56
5	0.56040	0.67663	1.47792	0.82822	0.57477	0.70238	1.42374	0.81832	55
6	0.56064	0.67705	1.47699	0.82806	0.57501	0.70281	1.42286	0.81815	54
7	0.56088	0.67748	1.47607	0.82790	0.57524	0.70325	1.42198	0.81798	53
8	0.56112	0.67790	1.47514	0.82773	0.57548	0.70368	1.42110	0.81782	52
9	0.56136	0.67832	1.47422	0.82757	0.57572	0.70412	1.42022	0.81765	51
10	0.56160	0.67875	1.47330	0.82741	0.57596	0.70455	1.41934	0.81748	**50**
11	0.56184	0.67917	1.47238	0.82724	0.57619	0.70499	1.41847	0.81731	49
12	0.56208	0.67960	1.47146	0.82708	0.57643	0.70542	1.41759	0.81714	48
13	0.56232	0.68002	1.47053	0.82692	0.57667	0.70586	1.41672	0.81698	47
14	0.56256	0.68045	1.46962	0.82675	0.57691	0.70629	1.41584	0.81681	46
15	0.56280	0.68088	1.46870	0.82659	0.57715	0.70673	1.41497	0.81664	45
16	0.56305	0.68130	1.46778	0.82643	0.57738	0.70717	1.41409	0.81647	44

tablice prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija (izvadak)

1. Ako je kut zadan s minutama, primjerice $\alpha = 34^\circ 18'$, s koliko decimala moramo odrediti vrijednost kosinusa? Napravi račun sličan prethodnom.

2. Ako je poznato $\alpha = 34^\circ 13'$ i $\beta = 22^\circ 18' 38''$, s koliko decimala treba odrediti $\sin(\alpha + \beta)$? Napiši tu vrijednost.

3. Zadana je vrijednost $\sin \alpha = 0.238$. Koliki je kut?

4. Kut $\alpha = 52^\circ$ određen je kutomjerom. Tu je 1° preciznost s kojom to možemo učiniti. Kako ćemo zapisati $\sin \alpha$?

5. Vrlo precizna astronomska mjerenja zahtijevaju poznavanje kuta s točnošću većom od $1''$. Poznato je da vrijedi $\sin \alpha = 0.3623830512$. Koliki je kut α? Napiši njegovu mjeru u stupnjevima. Kako bi se taj broj napisao korištenjem minuta i sekunda?

KOLIKO JE DUG LUK KUTA JEDNE SEKUNDE?

Nacrtamo li na papiru kružnicu polumjera 4 cm, koji dio njezina luka odgovara kutu od $1''$?

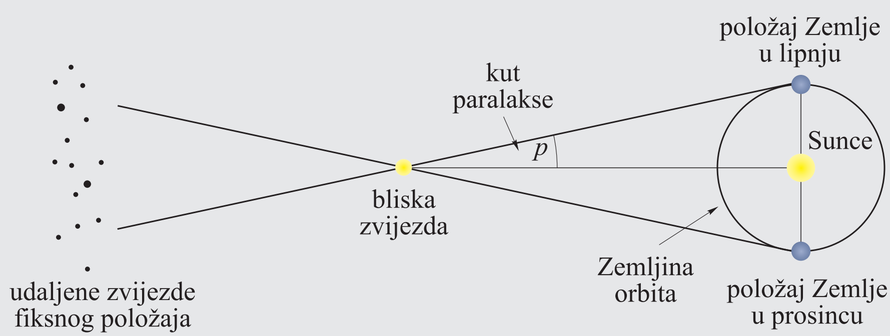
Odgovor je lako dati. Duljina luka iznosi $\ell = \dfrac{\pi r \alpha}{180^\circ}$. Uvrstimo li $r = 40$ mm , $\alpha = (1/3600)^\circ$, dobit ćemo $\ell = 0.00024$ mm . Kut od jedne sekunde ne može se nacrtati u našoj bilježnici (a niti kut od jedne minute).

Trag olovke debeo je oko 0.7 mm. To je upravo duljina luka za kut od 1° .

Povećajmo našu kružnicu do veličine glavne kružnice zemaljske kugle. Njezin je polumjer oko 6400 km, pa sad sekundi odgovara luk (tj. udaljenost na površini Zemlje) od 31 metra. Sekunde su prave veličine kad je riječ o preciznosti lokacije položaja s pomoću GPS uređaja. Ta preciznost danas odgovara minimalno jednoj sekundi, a uz pomoć korekcija i sigurnijeg načina računanja može se postići točnost lokacije od 2 do 5 metara.

Ova je točnost impresivna jer je kut veličine desetine jedne sekunde uistinu minimalan.

Što onda reći za precizna astronomska mjerenja koja idu do milijuntog dijela sekunde? Najvažniji način za mjerenje udaljenosti do neke zvijezde jest u određivanju njezine *paralakse*, tj. kuta pod kojim se ta zvijezda vidi sa Zemlje u razmacima od 6 mjeseci, a u odnosu na vrlo udaljena nebeska tijela u pozadini.



Paralaksa zvijezde je kut reda veličine jedne sekunde ili manje. Mjera za udaljenost zvijezda je **parsek**. To je duljina katete pravokutnog trokuta kojemu je druga kateta dugačka jednu astronomsku jedinicu (tj. udaljenost Zemlje od Sunca), a kut ima mjeru od 1 sekunde.

1. Na kojoj će se udaljenosti od oka olovka duljine 20 cm vidjeti pod kutom od 1 sekunde?
2. Koja udaljenost na Zemljinoj površini odgovara kutu od $1'$? Usporedi taj broj s duljinom morske milje.
3. Provjeri da jedan parsek iznosi 206 265 astronomskih jedinica.
4. Iskaži 1 parsek u svjetlosnim godinama.
5. Pokaži da je udaljenost neke zvijezde jednaka $1/\alpha$ parseka ako je α paralaksa te zvijezde (u sekundama).

Zadatci 6.1.

1. Dva kuta, α i β, $0^\circ < \alpha,\ \beta < 90^\circ$ *komplementarna* su ako je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Odredi komplement kuta α ako je:

1) $\alpha = 38^\circ$; **2)** $\alpha = 47^\circ 15'$;
3) $\alpha = 82^\circ 49' 33''$; **4)** $\alpha = 11^\circ 11' 11''$.

2. Dva kuta, α i β, $0^\circ < \alpha,\ \beta < 180^\circ$ *suplementarna* su ako je $\alpha + \beta = 180^\circ$. Odredi suplement kuta α ako je:

1) $\alpha = 33^\circ$; **2)** $\alpha = 111^\circ 11' 11''$;
3) $\alpha = 79^\circ 59' 59''$; **4)** $\alpha = 100^\circ 01' 01''$.

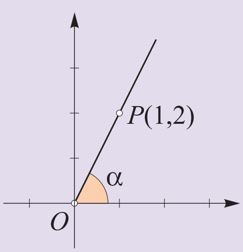
3. Mjeru kuta α zadanu u stupnjevima izrazi u stupnjevima, minutama i sekundama:

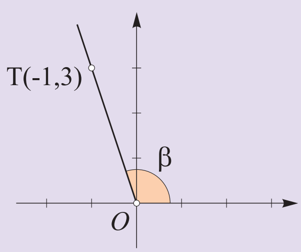
1) $\alpha = 13.715^\circ$; **2)** $\alpha = -122.4445$;
3) $\alpha = 133.2345^\circ$; **4)** $\alpha = -47.6534^\circ$.

4. Mjeru kuta izrazi u stupnjevima:

1) $45^\circ 15' 33''$; **2)** $95^\circ 27' 18''$;
3) $75^\circ 24' 48''$; **4)** $101^\circ 11' 10''$.

5. Odredi četiri trigonometrijske funkcije kutova zadanih podatcima sa slike

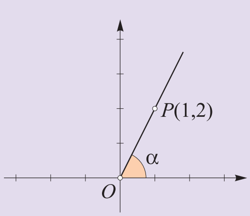


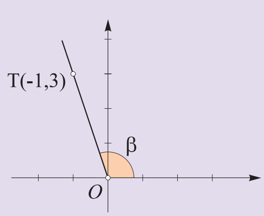


6. Jedan krak kuta α je na osi Ox, vrh u ishodištu, a drugi krak na pravcu. Odredi sinus, kosinus i tangens kuta α.

1) $2x - 5y = 0$; **2)** $x - 3y = 0$;
3) $2x + 3y = 0$; **4)** $x + 2y = 0$.

7. Odredi kutove zadane podatcima sa slika





8. Za zadane kutove izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Rezultate upiši u bilježnicu, s četiri decimale.

kut	sin	cos	tg	ctg
25°				
50°				
75°				
100°				
125°				
150°				
175°				

9. Za zadane kutove izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Rezultate upiši u bilježnicu, s potrebnim brojem decimala.

kut	sin	cos	tg	ctg
$15^\circ 26'$				
$42^\circ 18'$				
$66^\circ 13' 12''$				
$98^\circ 18'$				
$122^\circ 5'$				
$171^\circ 26' 3''$				

10. Odredi kut α ako je:

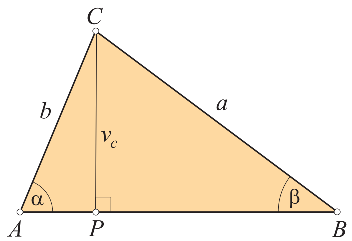
1) $\sin\alpha = 0.3616$; **2)** $\sin\alpha = 0.251378$;
3) $\cos\alpha = 0.313$; **4)** $\cos\alpha = -0.1433$;
5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0.725$; **6)** $\mathrm{tg}\,\alpha = 3.21277$;
7) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0.1414$; **8)** $\mathrm{ctg}\,\alpha = -0.0588$.

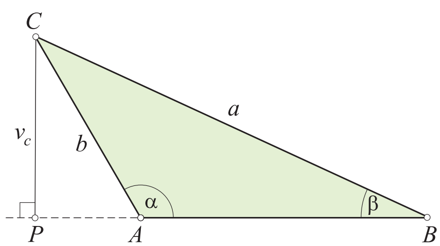
11. Iz zadane vrijednosti trigonometrijske funkcije odredi mjeru suplementarnog kuta. Rezultat zapiši u stupnjevima.

1) $\cos\alpha = 0.3$; **2)** $\cos\beta = -0.8$;
3) $\mathrm{tg}\,\gamma = 0.5$; **4)** $\sin\delta = 0.2$.

6.2. Poučak o sinusima

Poučak o sinusima





Nacrtajmo bilo koji trokut ABC (prva slika lijevo).

Iz pravokutnog trokuta APC čitamo $v_c = b\sin\alpha$. Ako je kut α tup (druga slika), onda iz trokuta PAC slijedi $v_c = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$. Dakle, uvijek je

$$v_c = b\sin\alpha.$$

Slično je iz trokuta BPC

$$v_c = a\sin\beta.$$

Slijedi $\quad a\sin\beta = b\sin\alpha \implies \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}.$

Potpuno na isti način dobili bismo i ovaj omjer:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Time smo dokazali sljedeći važni poučak.

Poučak o sinusima

U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama suprotnih kutova jednaki:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Te jednakosti možemo napisati u obliku produženog razmjera

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Rješavanje trokuta

Pri rješavanju zadataka vezanih uz trokut moramo iz nekih njegovih poznatih osnovnih elemenata (stranica i kutova) odrediti preostale. Prema poučcima o sukladnosti trokuta znamo da trokut može biti zadan tim elementima na jedan od sljedećih četiriju načina:

(a) zadana je stranica i dva kuta

(b) zadane su dvije stranice i kut nasuprot većoj od njih

(c) zadane su dvije stranice i kut između njih

(d) zadane su tri stranice.

U slučajevima (a) i (b) ostale elemente trokuta možemo odrediti primjenom poučka o sinusima.

Stranica i dva kuta

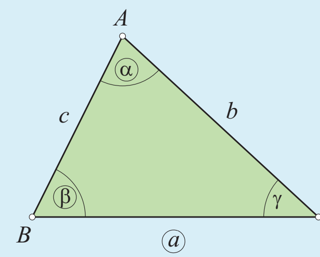
Razmotrimo prvi od ovih četiriju slučajeva.

Ako su zadana dva kuta, određen je i treći kut jer je zbroj kutova u trokutu jednak 180°. Trebamo odrediti preostale dvije stranice trokuta. To činimo s pomoću *poučka o sinusima*.

Primjer 1. U trokutu su zadani kutovi $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 72^\circ$ i stranica $a = 4.6$ cm. Odredimo preostale dvije stranice.

Odredimo najprije treći kut:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 58^\circ.$$



Preostale dvije stranice računamo iz poučka o sinusima.

Iz

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

slijedi

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 50^\circ} \cdot 4.6 \text{ cm} = 5.7 \text{ cm}.$$

Slično, iz drugog omjera

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

dobivamo

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a = \frac{\sin 58^\circ}{\sin 50^\circ} \cdot 4.6 \text{ cm} = 5.1 \text{ cm}.$$

Zadatak 1. Kutovi trokuta u omjeru su $3 : 5 : 7$. Duljina najkraće stranice trokuta iznosi 11 cm. Kolika je duljina najdulje stranice?

Primjer 2. U trokutu ABC poznat je opseg $2s = 22$ cm i kutovi $\alpha = 67^\circ$ i $\beta = 52^\circ$. Kolike su njegove stranice?

Riješimo najprije ne uvrštavajući konkretne vrijednosti. (Takav je postupak često jednostavniji i pregledniji.)

Iz dvaju poznatih kutova možemo odrediti treći: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. Iz poučka o sinusima je $b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}a$ i $c = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a$. Uvrstimo te vrijednosti u $a + b + c = 2s$.

Dobivamo:

$$a+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a=2s,$$

odakle slijedi

$$a=\frac{2s\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

Identična formula vrijedi i za druge stranice trokuta:

$$b=\frac{2s\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma},$$

$$c=\frac{2s\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

Sad uvrštavamo konkretne vrijednosti. Za kut γ imamo: $\gamma=180^\circ-67^\circ-52^\circ=61^\circ$. Odavde prema izvedenim formulama slijedi $a=7.84$ cm, $b=6.71$ cm, $c=7.45$ cm.

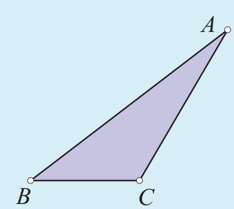
Zadatak 2. Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 25 cm. Nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od $36^\circ12'$ i $103^\circ42'$. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Dvije stranice i kut nasuprot jednoj od njih

Iz poučaka o sukladnosti trokuta znamo da je u ovom slučaju trokut jednoznačno određen ako se kut nalazi *nasuprot većoj stranici*.

Primjer 3. Odredimo nepoznate elemente u trokutu kojem je poznato $a=3$ cm, $b=5$ cm i $\beta=30^\circ$.

Određujemo najprije kut α:



$$\sin\alpha=\frac{a}{b}\sin\beta=\frac{3}{5}\sin 30^\circ=0.3$$

pa je $\alpha=17^\circ28'$. Sada je $\gamma=132^\circ32'$ i konačno

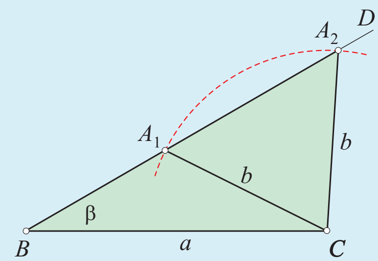
$$c=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot b=\frac{\sin 132^\circ32'}{\sin 30^\circ}\cdot 5=7.37\text{ cm}.$$

Zadatak 3. Odredi nepoznate elemente u trokutu ABC ako je $b=34$ cm, $c=52$ cm, $\gamma=66^\circ33'11''$.

Promotrimo sada što se događa u slučaju kad se zadani kut ne nalazi nasuprot većoj stranici. Vidjet ćemo da tada mogu postojati dva različita trokuta koji se podudaraju u dvjema stranicama i jednom kutu.

Primjer 4. Odredimo duljinu stranice c te kutove α i γ trokuta u kojem je poznato $a = 5$ cm, $b = 3$ cm i $\beta = 30°$.

Najprije ćemo nacrtati skicu. Povucimo dužinu $\overline{BC}$ dugačku 5 cm i uz vrh B nacrtajmo kut $\sphericalangle CBD$ od $30°$. Opišimo zatim luk kružnice sa središtem u C i polumjerom 3 cm koji siječe drugi krak BD u dvjema točkama, A_1 i A_2. Oba trokuta A_1BC i A_2BC zadovoljavaju uvjete zadatka. Odredit ćemo njihove elemente.



Rabimo poučak o sinusima da bismo odredili kut α. Vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta = \frac{5}{3}\sin 30° = 0.83333.$$

Odavde je $\alpha = 56°27'$ ili $\alpha = 123°33'$ jer ova dva kuta imaju isti sinus. Odgovarajuće vrijednosti za treći kut γ dobivamo iz $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ pa je $\gamma = 93°33'$ ili $\gamma = 26°27'$.

Preostaje odrediti stranicu c. Ponovno rabimo poučak o sinusima:

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}b$$

pa je

$$c = \frac{\sin 93°33'}{\sin 30°}\cdot 3 = 5.99 \text{ cm} \quad \text{ili} \quad c = \frac{\sin 26°27'}{\sin 30°}\cdot 3 = 2.67 \text{ cm}.$$

Prema tome, dva rješenja glase:

$$\begin{aligned} &\alpha = 56°27', &&\gamma = 93°33', &&c = 5.99 \text{ cm},\\ &\alpha = 123°33', &&\gamma = 26°27', &&c = 2.67 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Zadatak 4. Odredi duljinu stranice c trokuta ABC ako je $a = 15$ cm, $b = 17.2$ cm, $\alpha = 42°18'$.

Zaključujemo: ako je zadan kut nasuprot *većoj* stranici, onda zadatak (uvijek) ima jednoznačno rješenje. Ako je zadan kut nasuprot *manjoj* stranici, zadatak može imati dva, jedno ili nijedno rješenje.

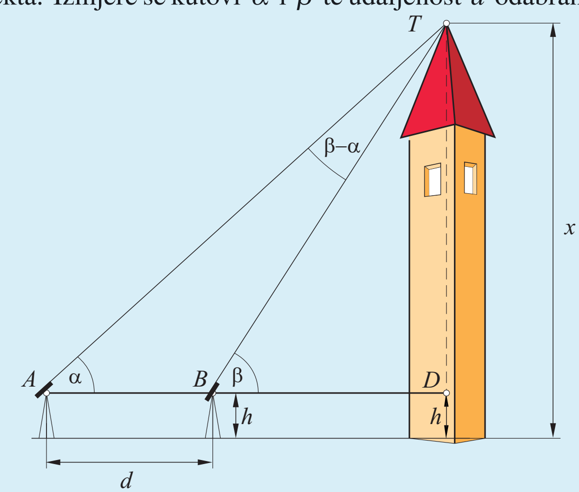
Dakle, kada su poznati kutovi trokuta, *najprije računamo stranicu nasuprot najvećem kutu*.

Primjene poučka o sinusima

Potrebe mjeriteljstva bile su kroz povijest, uz astronomska mjerenja, najvažniji razlog razvoja trigonometrije. Osnovni je problem mjeriteljstva odrediti udaljenost dviju, najčešće nedostupnih, točaka. Opća je shema ovakva: na dostupnom dijelu terena odrede se istaknute točke (kote) i izmjeri njihova udaljenost. Teodolitom se mogu izmjeriti kutovi između bilo kojih triju vidljivih točaka, među kojima ima i onih koje nam nisu dostupne. Nakon toga zadatak je trigonometrije izračunati tražene udaljenosti.

Ilustrirajmo nekoliko tipičnih situacija u kojima se rabi poučak o sinusima.

Primjer 5. Pri mjerenju visine objekta kojem je podnožje nedostupno, možemo postupiti na sljedeći način. Odaberu se dvije točke, A i B takve da pravac AB prolazi nožištem objekta. Izmjere se kutovi α i β te udaljenost d odabranih točaka.



Kut pri vrhu T u trokutu ABT je $\beta - \alpha$. Naime, prema poučku o vanjskom kutu trokuta – vanjski kut jednak je zbroju dvaju nesusjednih unutarnjih kutova. Prema poučku o sinusima je

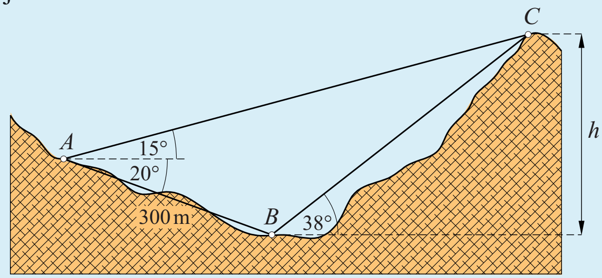
$$|AT| : d = \sin(\pi - \beta) : \sin(\beta - \alpha)$$

$$|AT| = \frac{d \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Neka je h visina instrumenta, a x tražena visina objekta. Iz pravokutnog trokuta ADT je $x - h = |AT| \sin\alpha$ pa je konačno

$$x = \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} + h.$$

Primjer 6. Vrh C brda vidi se iz mjesta A pod kutom $15°$, a iz podnožja B brda, 300 metara udaljenog od A, pod kutom od $38°$. Ako nagib od A do B iznosi $20°$, kolika je visina h brda?



Kut koji gleda iznad razine horizonta zovemo kut elevacije*, dok za onaj koji gleda ispod razine kažemo da je* kut depresije*. Na slici je kut elevacije u točki* A $15°$*, a kut depresije* $20°$.

Izračunajmo kutove trokuta iz zadanih podataka:

$$\alpha = \sphericalangle CAB = 15° + 20° = 35°,$$
$$\beta = \sphericalangle ABC = 180° - (20° + 38°) = 122°,$$
$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 23°.$$

Poznata je i stranica $c = |AB|$ trokuta. Po poučku o sinusima je

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}c = \frac{\sin 35°}{\sin 23°} \cdot 300 = 440.4 \text{ m}.$$

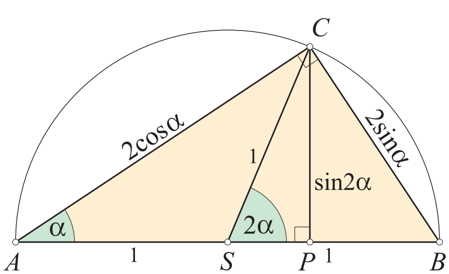
Zato je

$$h = a \sin 38° = 271 \text{ m}.$$

Sinus dvostrukog kuta

Za svaki kut α vrijedi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$



Kut nad promjerom je pravi pa je trokut ABC sa slike pravokutan. Hipotenuza $\overline{AB}$ ima duljinu 2 pa je duljina stranice $|AC| = 2\cos\alpha$, a duljina stranice $|BC| = 2\sin\alpha$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\sphericalangle CSB = 2\alpha$. Iz pravokutnog trokuta SPC imamo $|CP| = \sin 2\alpha$.

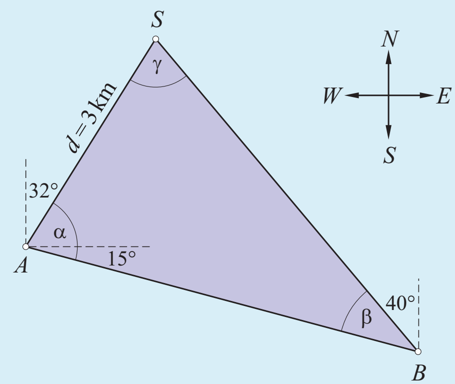
Umnožak kateta u pravokutnom trokutu jednak je umnošku hipotenuze i visine na nju pa je:

$$2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha = 2 \cdot \sin 2\alpha.$$

Primjer 7. Kada je brod u položaju A, tada se 3 km udaljen svjetionik S vidi pod kutom 32° istočno. Deset minuta kasnije on se iz položaja B vidi pod kutom 40° zapadno. Ako brod ima smjer kretanja 15° prema jugu, kolika je njegova brzina?

Odredimo kutove trokuta:

$$\alpha = 90^\circ - 32^\circ + 15^\circ = 73^\circ,$$
$$\beta = 90^\circ - 15^\circ - 40^\circ = 35^\circ,$$
$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 72^\circ.$$



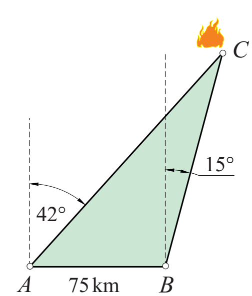
Zadana je udaljenost $d = |AS| = 3$ km. Po poučku o sinusima je

$$s = |AB| = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}d = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 35^\circ}\cdot 3\text{ km}$$
$$= 4.97\text{ km}.$$

Odavde računamo brzinu

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4.97\text{ km}}{\frac{1}{6}\text{ h}} = 29.84\text{ km/h}.$$

Zadatak 5. Dvije osmatračnice za otkrivanje šumskih požara smještene su na istoj geografskoj širini, a međusobno su udaljene 75 km. Iz osmatračnice A vatra je uočena u točki C pod kutom 42° istočno, a iz osmatračnice B pod kutom 15°, također istočno. Kolike su udaljenosti osmatračnica od mjesta požara?



Zadatci 6.2.

1. Izračunaj duljine ostalih dviju stranica i treći kut trokuta ako je:

1) $a = 21$ cm, $\alpha = 66°$, $\beta = 52°$;
2) $a = 7.3$ cm, $\beta = 86°$, $\gamma = 51°$;
3) $b = 13.2$ cm, $\alpha = 21°48'$, $\beta = 123°42'$;
4) $b = 44.5$ cm, $\alpha = 103°28'$, $\gamma = 41°33'$;
5) $c = 10$ cm, $\alpha = 88°$, $\gamma = 12°$;
6) $c = 0.89$ cm, $\alpha = 28°$, $\beta = 34°$.

2. Izračunaj duljinu treće stranice i ostale kutove trokuta ako je:

1) $a = 21$ cm, $b = 15$ cm, $\alpha = 66°$;
2) $a = 3.8$ cm, $b = 5.9$ cm, $\beta = 64°10'$;
3) $a = 0.88$ cm, $b = 1.25$ cm, $\beta = 87°36'$;
4) $a = 10.5$ cm, $c = 13.5$ cm, $\alpha = 48°46'$;
5) $b = 21$ cm, $c = 15$ cm, $\gamma = 36°$;
6) $a = 13.8$ cm, $c = 8$ cm, $\gamma = 15°$.

3. Ako su a i b duljine stranica, a α i β tim stranicama suprotni kutovi te ako vrijedi $\dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\cos\beta}$, taj je trokut jednakokračan. Dokaži.

4. Kutovi trokuta u omjeru su $3 : 5 : 7$. Koliki je omjer duljina najdulje i najkraće stranice trokuta?

5. U trokutu ABC je $\alpha = 2\beta$, $\beta = 3\gamma$, te $a + 2b = 30$ cm. Kolika je duljina stranice a ovog trokuta?

6. Odredi duljinu stranice c i kutove trokuta ABC ako je $a = 16$ cm, $b = 11.2$ cm te $\alpha + \beta = 93°$.

7. Odredi duljinu stranice a i kutove trokuta ABC ako je $b = 7.5$ cm, $c = 6.2$ cm te $\beta - \gamma = 17°$.

8. Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 49 cm, a nasuprot tim stranicama su kutovi od $70°24'$ i $50°16'$. Izračunaj duljine stranica trokuta.

9. Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 17.8 cm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od $99°$ i $53°$. Izračunaj duljinu treće stranice trokuta.

10. Razlika duljina dviju stranica trokuta je 3.2 cm, a kutovi nasuprot tim stranicama iznose $52°$ i $67°$. Kolika je duljina treće stranice tog trokuta?

11. Razlika duljina dviju stranica trokuta je 34 cm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od $108°$ i $28°$. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

12. Opseg trokuta ABC je 30 cm, $\alpha = 47°$, $\beta = 65°$. Izračunaj duljine stranica trokuta.

13. Razlika duljina najdulje i najkraće stranice trokuta iznosi 6 cm, a sinusi unutarnjih kutova trokuta u omjeru su $3 : 4 : 2$. Kolike su duljine stranica trokuta?

14. Opseg trokuta je 30 cm, a njegovi su unutarnji kutovi u omjeru $5 : 7 : 8$. Kolike su duljine stranica trokuta?

15. U trokutu ABC je $\alpha = 96°45'$, $c = 7$ cm, $v_a = 5.5$ cm. Kolike su duljine stranica a i b tog trokuta?

16. U trokutu ABC je $\gamma = 72°8'$, $a = 18$ cm, $v_c = 11$ cm. Kolika je duljina stranice c tog trokuta?

17. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan šiljasti kut trokuta iznosi $42°28'$. Odredi duljinu odsječka simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.

18. Jedan šiljasti kut pravokutnog trokuta je $36°52'12''$. U kojem omjeru hipotenuzu tog trokuta dijeli točka u kojoj je siječe simetrala pravog kuta?

19. Vrhom A na osnovici jednakokračnog trokuta ABC i središtem trokutu opisane kružnice položen je pravac koji krak $\overline{BC}$ siječe u točki D. Kolika je duljina dužine $\overline{AD}$ ako je duljina kraka 10 cm, a kut pri vrhu trokuta iznosi $\alpha = 55°12'$?

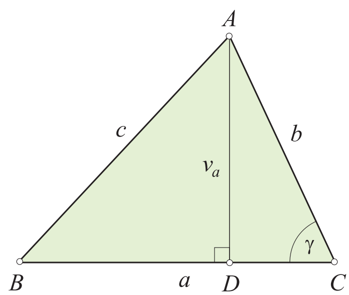
6.3. Poučak o kosinusu

Stranice i kutove trokuta vezuje još jedan temeljni poučak.

Neka je ABC bilo kakav trokut. Kao i pri izvodu poučka o sinusima, razmotrit ćemo sljedeće dvije situacije:

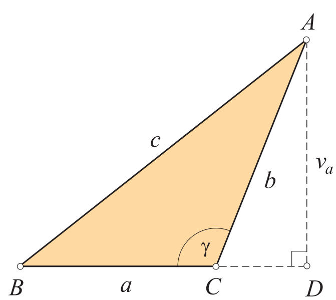
(a) kut γ je šiljast

(b) kut γ je tup.



(a) Sa slike lijevo čitamo

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\ &= (a - |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 - 2a \cdot |CD| + |CD|^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2a \cdot |CD| \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$



(b) Sa druge slike lijevo čitamo

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\ &= (a + |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 + 2a \cdot |CD| + |CD|^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2a \cdot |CD| \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^\circ - \gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Prema tome, u oba slučaja vrijedi ista formula. Budući da se u njoj javlja kosinus kuta, ovu formulu nazivamo **poučak o kosinusu**. Primijetimo da je on istinit i kad je kut γ pravi jer tada poučak o kosinusu prelazi u Pitagorin poučak.

Analogne formule vrijede i za preostale dvije stranice trokuta.

Poučak o kosinusu

Kvadrat stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak tih stranica i kosinusa kuta između njih:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Primjenom poučka o kosinusu rješavamo preostale dvije mogućnosti zadavanja trokuta:

(c) zadane su dvije stranice i kut među njima

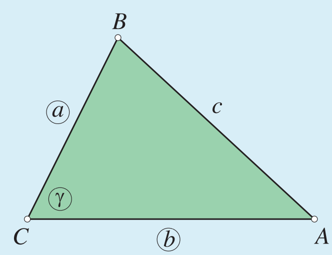
(d) zadane su tri stranice.

Dvije stranice i kut među njima

S pomoću poučka o kosinusu najprije odredimo treću stranicu. Nakon toga lako je izračunati jedan od dvaju preostalih kutova.

Primjer 1. Odredimo nepoznate elemente u trokutu ako je zadano $a = 4.3$ cm, $b = 5.6$ cm i $\gamma = 52^\circ$.

Skicirajmo trokut. On je ovim podatcima jednoznačno određen.



Treću stranicu, c, određujemo poučkom o kosinusu:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4.3^2 + 5.6^2 - 2\cdot 4.3\cdot 5.6\cdot \cos 52^\circ = 20.2 \end{aligned}$$

pa je $c = 4.4944$ cm.

U ovom su nam trenutku poznate sve tri stranice trokuta i jedan kut. Da bismo odredili bilo koji od preostalih dvaju kutova, možemo upotrijebiti bilo poučak o sinusima, bilo poučak o kosinusu. Pokazat ćemo primjerom da ipak nije svejedno koji kut i s pomoću kojeg poučka tražimo.

Potražimo, primjerice, kut β poučkom o sinusima:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma = \frac{5.6}{4.4944}\sin 52^\circ = 0.98186.$$

Kut β jednoznačno je određen jer postoji samo jedan trokut sa zadanim elementima, međutim, mi u ovom trenutku ne znamo je li vrijednost tog kuta veća ili manja od 90°. Izračunajmo obje moguće vrijednosti: $\beta_1 = 79^\circ 4'$ ili $\beta_2 = 100^\circ 56'$.

U prvom bi slučaju bilo

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta_1 - \gamma = 48^\circ 56',$$

a u drugom

$$\alpha_2 = 180^\circ - \beta_2 - \gamma = 27^\circ 4'.$$

Koja je vrijednost prava, još uvijek ne možemo odrediti. Problem je nastao zato što tražimo kut β *nasuprot većoj stranici* jer je $b > c$. Umjesto toga, trebali smo potražiti kut α nasuprot manjoj stranici:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma = \frac{4.3}{4.4944}\sin 52^\circ = 0.753926.$$

Kako je kut α manji od kuta γ jer nasuprot manjoj stranici leži manji kut, sad smo sigurni da vrijedi $\alpha = 48^\circ 56'$ pa je treći kut $\beta = 79^\circ 4'$.

Druga (i jednostavnija) mogućnost jest da kut određujemo poučkom o kosinusu. Tad smijemo potražiti bilo koji od preostalih dvaju kutova bez straha da će možda doći do pogrešnog odabira. Vrijedi, primjerice,

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4.3^2 + 4.4944^2 - 5.6^2}{2 \cdot 4.3 \cdot 4.4944} = 0.18963.$$

Sad je kut β jednoznačno određen. On se nalazi u prvom kvadrantu i iznosi $\beta = 79^\circ 4'$ pa je $\alpha = 48^\circ 56'$.

Zadatak 1. Odredi duljinu stranice a trokuta ABC ako je $b = 12$ cm, $c = 15$ cm te $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Uputa. Najprije odredi $\cos\alpha = \pm\dfrac{5}{13}$ i dalje računaj po *poučku o kosinusu*. Zadatak ima dva rješenja.

Zadatak 2. Duljine dviju stranica u trokutu su 11 cm i 18 cm, a kut nasuprot jedne od ovih dviju stranica dva je puta veći od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Uputa. Uzmi da je $a : b = \sin\alpha : \sin 2\alpha = 1 : (2\cos\alpha)$.

Tri stranice

Ako su zadane tri stranice, tada s pomoću poučka o kosinusu možemo odrediti bilo koji od triju njegovih kutova. Nakon toga drugi kut možemo odrediti bilo poučkom o kosinusu, bilo poučkom o sinusima.

Da bismo osigurali jednoznačnost odabira, korisno je najprije odrediti kut nasuprot najvećoj stranici. Nakon toga za računanje drugog kuta možemo bez opasnosti upotrijebiti poučak o sinusima.

Primjer 2. Odredi kutove u trokutu ako su mu zadane stranice $a = 5$ cm, $b = 6$ cm i $c = 8$ cm.

Odredimo najprije kut γ:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{3}{60} = -0.05.$$

Kako je kosinus negativan, kut γ je tup: $\gamma = 92°52'$.

Drugi kut, recimo β, računamo poučkom o sinusima (taj je kut sigurno šiljast):

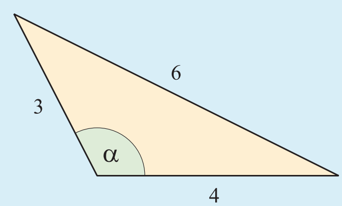
$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma = \frac{6}{8} \cdot \sin 92°52' = 0.74906,$$

pa je $\beta = 48°31'$. Treći kut iznosi $\alpha = 38°37'$.

Primjer 3. Duljine stranica trokuta u omjeru su $3 : 4 : 6$. Koliki je najveći kut ovog trokuta?

Omjerom duljina stranica trokut nije jednoznačno određen. No, svi trokuti koji imaju navedeno svojstvo međusobno su slični.

Kako su odgovarajući kutovi sličnih trokuta sukladni, u rješavanju zadatka možemo uzeti da su duljine stranica jednake 3 cm, 4 cm i 6 cm. Najveći kut je nasuprot najdulje stranice pa primjenom poučka o kosinusu zapisujemo:



$$\cos\alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24}.$$

Očito, kut α je tup te nalazimo $\alpha = 117°17'$.

U elektroničkom dijelu udžbenika riješi dodatne zadatke vezane uz poučak o sinusima i poučak o kosinusu.

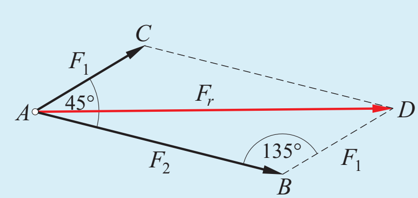
Riješimo neke primjere primjenom poučka o kosinusu.

Primjer 4. Na tijelo djeluju dvije sile iznosa $F_1 = 5$ N i $F_2 = 10$ N. Kut između njih je $45°$. Koliki je iznos rezultantne sile?

Iznos rezultantne sile nalazimo iz trokuta ABD poučkom o kosinusu:

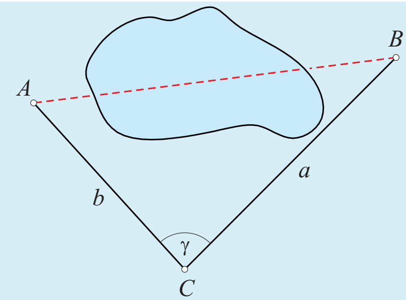
$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 135°$$
$$= 195.71 \text{ N}^2$$

pa je $F_r = 14$ N.



Primjer 5.

Udaljenost dviju točaka A i B ne možemo izmjeriti neposredno. Ako je moguće na terenu odrediti točku C takvu da možemo izmjeriti udaljenosti $|AC|$, $|BC|$ i kut γ, onda traženu duljinu $|AB|$ računamo po poučku o kosinusu.



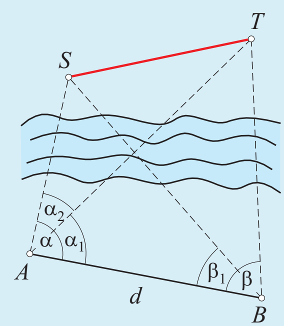
Primjer 6.

Želimo izračunati udaljenost dviju nepristupačnih točaka S i T.

Na pristupačnom dijelu terena izmjerimo udaljenost d dviju točaka A i B. Odredimo zatim kutove α i β_1 u trokutu ABS te kutove α_1 i β u trokutu ABT. Onda je, po poučku o sinusima:

$$|AS| = \frac{d\sin\beta_1}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta_1)} = \frac{d\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta_1)}.$$

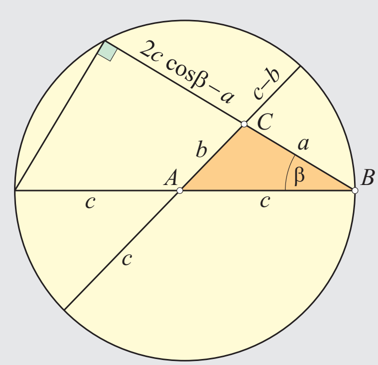
$$|AT| = \frac{d\sin\beta}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta)} = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha_1+\beta)}.$$



Sad u trokutu AST znamo dvije stranice. Kako bismo izračunali traženu treću stranicu $|ST|$, trebamo još poznavati kut α_2. Ako sve četiri točke A, B, S i T leže u jednoj ravnini, onda je $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$. Inače α_2 moramo izmjeriti. Zatim se duljina stranice $\overline{ST}$ računa poučkom o kosinusu iz trokuta AST.

POUČAK O KOSINUSU

$$a \cdot (2c\cos\beta - a) = (c-b)(c+b)$$



Zadatci 6.3.

1. Izračunaj duljinu treće stranice i ostalih dvaju kutova trokuta ako je:

1) $a = 42$ cm, $b = 37.1$ cm, $\gamma = 67°19'$;
2) $a = 22.9$ cm, $c = 16.9$ cm, $\beta = 39°52'$;
3) $b = 3.8$ cm, $c = 5.2$ cm, $\alpha = 33°36'$;
4) $a = 13.2$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 26°13'$;
5) $b = 1.55$ cm, $c = 2.15$ cm, $\alpha = 71°34'$.

2. Koliki su kutovi trokuta ako su zadane duljine njegovih stranica:

1) $a = 4.4$ cm, $b = 5.8$ cm, $c = 6.2$ cm;
2) $a = 29$ cm, $b = 44$ cm, $c = 59$ cm;
3) $a = 13.5$ cm, $b = 17.2$ cm, $c = 26.8$ cm.
4) $a = 3.75$ cm, $b = 4.17$ cm, $c = 5$ cm.
5) $a = 113$ cm, $b = 127$ cm, $c = 144$ cm?

3. Izračunaj duljinu stranice c trokuta ABC ako je $a = 7.8$ cm, $\alpha = 72°36'$, $\beta = 55°12'$.

4. Duljine stranica trokuta su a, b i c. Ako je $a^2 + b^2 > c^2$, onda je kut nasuprot stranici c šiljast, a ako je $a^2 + b^2 < c^2$, taj je kut tup. Dokaži!

5. Duljine stranica trokuta u omjeru su $4 : 8 : 11$. Koliki je najveći kut ovog trokuta?

6. Za duljine stranica trokuta ABC vrijede omjeri: $a : b = 4 : 5$, $b : c = 7 : 10$. Koliki su kutovi trokuta ABC?

7. Duljine stranica trokuta u omjeru su $4 : 3 : 6$. Koliki je najmanji kut ovog trokuta?

8. Ako su duljine stranica trokuta 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, bez uporabe računala odredi najveći kut ovog trokuta.

9. Ako su duljine stranica trokuta 2, $\sqrt{3} - 1$ i $\sqrt{6}$, bez uporabe računala odredi najmanji kut ovog trokuta.

10. Duljine stranica trokuta su $n^2 + n + 1$, $2n + 1$ i $n^2 - 1$, gdje je n realan broj veći od 1. Koliki je kut nasuprot stranici duljine $n^2 + n + 1$?

— ◆ —

11. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna cijela broja, a najveći kut je dva puta veći od najmanjeg. Kolike su duljine stranica i koliki su kutovi trokuta?

12. Za duljine stranica trokuta vrijedi $c - b = b - a = 2$ cm, a jedan kut trokuta iznosi $120°$. Koliki je opseg trokuta?

13. Odredi duljine stranica u trokutu ako je $a^2 + 2c^2 = 82$, $b = 7$ cm, $\beta = 60°$.

14. Duljine dviju stranica trokuta su 25 cm i 30 cm, a kut nasuprot jednoj od tih dviju stranica dvostruko je veći od kuta nasuprot drugoj. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

15. Odredi duljine stranica trokuta ako vrijedi $a : b = 12 : 7$, $c = 3$ cm i $\alpha = 2\gamma$.

16. Omjer duljina dviju stranica trokuta je $7 : 4$, a kut nasuprot jedne od tih stranica dvostruko je veći od kuta nasuprot drugoj. Koliki je treći kut trokuta?

17. Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 57 cm. Nasuprot tim stranicama su kutovi od $75°$ i $42°$. Odredi duljinu stranice koja je nasuprot trećeg kuta trokuta.

18. Najdulja stranica trokuta ABC dugačka je 11 cm, a duljina njezine ortogonalne projekcije na pravac kojem pripada najkraća stranica za 4 cm dulja je od te stranice. Koliki je najmanji kut trokuta ako veličina srednjeg kuta iznosi $44°$?

19. Kolike su duljine stranica a i b trokuta ABC ako je $c = 20.5$ cm, $a + b = 28.5$ cm, $\gamma = 81°12'$?

20. Odredi duljinu stranice b trokuta ABC ako je $a = 15$ cm, $c = 18$ cm, $\sin\beta = \dfrac{8}{17}$.

21. U trokutu ABC je $a = 5.3$ cm, $c = 6$ cm, $v_c = 4.2$ cm. Kolika je duljina stranice b ovog trokuta?

22. Duljine dviju stranica trokuta su 24 cm i 15 cm. Duljina ortogonalne projekcije kraće od tih dviju stranica na dulju iznosi 7 cm. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

23. Dan je jednakostraničan trokut ABC. Točka D na stranici $\overline{BC}$ dijeli tu stranicu na dijelove s duljinama 2 cm i 4 cm. Izračunaj duljinu dužine $\overline{AD}$.

6.4. Trigonometrija trokuta

Sada ćemo pokazati kako se poznavanje trigonometrije, posebno poučaka o sinusima i kosinusu, može primijeniti u rješavanju planimetrijskih i stereometrijskih zadataka.

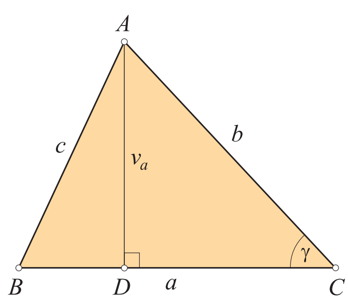
Posebno ćemo se osvrnuti na računanje različitih elemenata trokuta zato što je trokut najvažniji lik u planimetriji.

Iz poznatih stranica i kutova mogu se računati i neki drugi elementi trokuta: polumjer opisane i upisane kružnice, težišnice, visine, simetrale kutova, njegova površina i sl.

U trokutu ABC upotrebljavat ćemo sljedeće standardne oznake:

a, b, c	stranice trokuta
α, β, γ	kutovi trokuta
t_a, t_b, t_c	težišnice trokuta
v_a, v_b, v_c	visine trokuta
$s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$	simetrale kutova
R	polumjer opisane kružnice
r	polumjer upisane kružnice
s	poluopseg
P	površina trokuta.

Površina trokuta

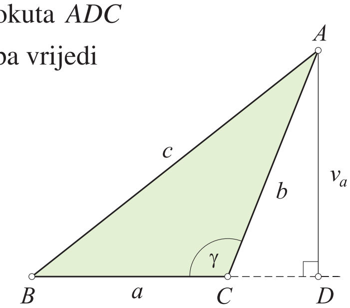


Nacrtajmo bilo koji trokut ABC i označimo njegove elemente na uobičajeni način.

Iz planimetrije znamo da je površina trokuta jednaka polovici umnoška stranice i visine na tu stranicu. Primjerice: $P = \frac{1}{2}av_a$. Iz pravokutnog trokuta ADC (slika lijevo) je $v_a = b\sin\gamma$ pa vrijedi

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Ako je kut γ tup, onda je $v_a = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$ (slika desno) i vrijedi ista formula. Iskažimo tu važnu formulu riječima.



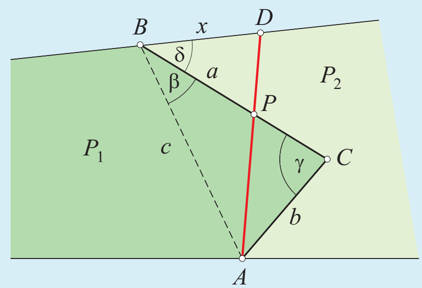
Površina trokuta

Površina trokuta jednaka je polovici umnoška dviju stranica i sinusa kuta između njih:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta. \qquad (1)$$

Primjer 1. Štef i Joža ispravljaju među između svojih imanja: granicu ACB zamjenjuju granicom AD, ali tako da se površine P_1 i P_2 njihovih imanja ne izmijene.

Na terenu su izmjerene duljine stranica a i b te kutovi γ i δ. Kolika mora biti udaljenost x točaka B i D?



Prikazana je rektifikacija zemljišta. Jedno se područje zamjenjuje drugim iste površine.

Trokut ACP mora biti iste površine kao i trokut BDP. No to znači da su trokuti ABC i ABD iste površine. Zato je

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}cx\sin(\beta+\delta),$$

pa odavde slijedi

$$x = \frac{ab\sin\gamma}{c\sin(\beta+\delta)}.$$

Stranica c izračuna se poučkom o kosinusu iz zadanih podataka a, b i γ.

Korisno je poznavati i formulu za površinu trokuta u kojem su poznati kutovi i jedna stranica. Neka je to stranica a. Iz poučka o sinusima dobivamo:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

Površina trokuta

Površina trokuta kojem poznajemo kutove i jednu stranicu je:

$$P=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

Primjer 2.

Anka želi ograditi svoje zemljište oblika trokuta koje ima površinu 2400 čhv[1]. Da ne bi mjerila opseg, lakše joj je odrediti kutove pri jednoj stranici; oni iznose 45° i 50°. Koliko će dugačka biti ograda?

Treći kut trokuta, označimo ga sa α, iznosi 85°. Odredimo duljinu stranice a nasuprot tom kutu. Iz $P=\dfrac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ slijedi

$$a=\sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Površina je zemljišta u četvornim metrima $P=8633\ \mathrm{m}^2$. Odavde je $a=178\ \mathrm{m}$. Opseg dobivamo iz:

$$\begin{aligned}o=a+b+c&=a+\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}\\&=a\left(1+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)=441\ \mathrm{m}.\end{aligned}$$

Izvedimo još neke formule za površinu trokuta.

Površina trokuta

Ako su poznate stranice trokuta, njegovu površinu računamo **Heronovom formulom**

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

gdje je $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg trokuta.

Heronovu formulu koristili smo u planimetriji. Načinimo ipak njezin izvod. Polazimo od temeljne formule $P=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, u kojoj $\sin\gamma$ valja izraziti s pomoću duljina a, b i c stranica trokuta.

[1] Hvat je stara mjera za dužinu. 1 hvat ima 1.896 m, a 1 četvorni hvat ima 3.597 m^2.

$$\begin{aligned}\sin^2\gamma &= 1-\cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)\\ &= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\\ &= \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

Sad je $a+b+c=2s$ te $c-a+b=2(s-a)$, $c+a-b=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$. Dobili smo

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nakon uvrštavanja u $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ dobit ćemo Heronovu formulu.

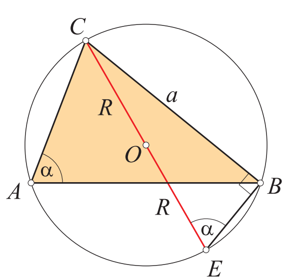
Polumjer opisane i upisane kružnice

Nacrtajmo trokut ABC i opišimo mu kružnicu. Označimo s a duljinu stranice $\overline{BC}$, s α kut pri vrhu A i s R polumjer opisane kružnice. Razmotrimo ove dvije mogućnosti:

(a) kut α je šiljast

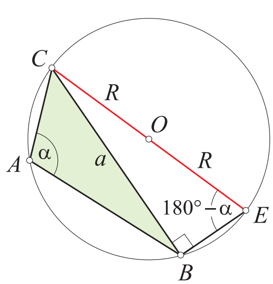
(b) kut α je tup.

Promotrimo obje situacije.



(a) Povucimo pravac CO. Neka on siječe kružnicu u točki E (slika lijevo). Trokut EBC je pravokutan jer je $\overline{EC}$ promjer kružnice. Prema poučku o obodnom kutu, kut pri vrhu E isti je kao i kut pri vrhu A. Zato vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}.$$



(b) Sad je četverokut $ABEC$ tetivni (druga slika lijevo) pa kut pri vrhu E iznosi $180^\circ-\alpha$. Iz pravokutnog trokuta BEC čitamo

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ-\alpha) = \frac{a}{2R}.$$

Ova jednakost vrijedi i za pravokutni trokut. Dakle, za bilo koji trokut vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Analogne jednakosti vrijede i za preostale dvije stranice trokuta.

Poučak o sinusima i polumjer opisane kružnice

U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama suprotnih kutova jednaki promjeru trokutu opisane kružnice:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R. \qquad (2)$$

Još u prvom razredu upoznali smo i sljedeće dvije formule.

Površina trokuta

Površina trokuta može se dobiti iz polumjera upisane kružnice i poluopsega:

$$P=rs. \qquad (3)$$

Ako su poznate stranice trokuta te polumjer opisane kružnice, onda vrijedi:

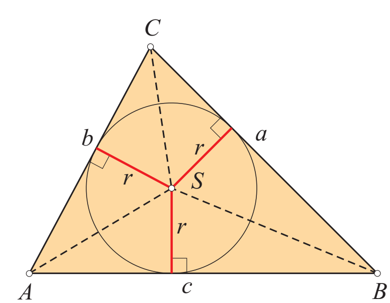
$$P=\frac{abc}{4R}. \qquad (4)$$

Formula (3) slijedi iz slike desno:

$$\begin{aligned}P&=P_{\triangle ASB}+P_{\triangle BSC}+P_{\triangle CSA}\\&=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=rs.\end{aligned}$$

Formula (4) slijedi iz (2) ovako:

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}.$$



Zadatak 1. U trokutu ABC je $a=30$ cm, $\beta=40^\circ 35'$, a duljina polumjera trokutu opisane kružnice iznosi 18 cm. Odredi duljinu polumjera kružnice upisane trokutu.

Ciklična zamjena

Neke su formule vezane uz trokut simetrične jer se u njima elementi trokuta javljaju ravnopravno. Primjer je takve formule **Heronova formula**:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

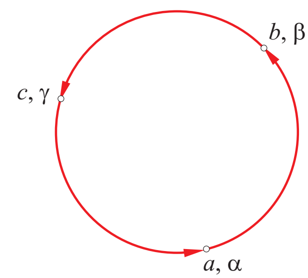
Neke formule nisu simetrične, poput

$$P = \frac{1}{2}av_a \quad \text{ili} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Kako je a bilo koja stranica po volji odabranog trokuta, ove se formule mogu iskazati i u nekoj drugoj kombinaciji stranica[2]:

$$P = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c.$$

S pomoću jedne nesimetrične formule možemo napisati drugu tako da zamijenimo imena elementima pazeći na cikličan poredak: stranica a prelazi u b, stranica b u c, stranica c u a i slično za druge elemente trokuta. Shematski to prikazujemo slikom.



Tako, primjerice, iz formule $v_a = b\sin\alpha$ cikličnom zamjenom dobivamo $v_b = c\sin\beta$, $v_c = a\sin\gamma$.

Visine trokuta

Visine trokuta obrnuto su proporcionalne duljinama odgovarajućih stranica. U to se možemo uvjeriti iz izraza za površinu trokuta.

Iz $\frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b$ slijedi

$$a : b = v_b : v_a.$$

Cikličnom zamjenom dobivamo:

$$b : c = v_c : v_b, \qquad c : a = v_a : v_c.$$

Primjer 3. Ako su v_a i v_b visine trokuta te ako je $v_a : v_b = 3 : 4$ i $\beta = 42°15'$, odredimo kut γ trokuta.

Iz $v_a : v_b = 3 : 4$ slijedi $a : b = 4 : 3$. Prema *poučku o sinusima* je $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ i odatle dobijemo $\sin\alpha = 0.89649$. Dvije su mogućnosti za kut α (zašto?):

$$\alpha_1 = 63°42' \quad \text{ili} \quad \alpha_2 = 116°18'.$$

Zbog toga zadatak ima dva rješenja:

$$\gamma_1 = 74°3' \quad \text{ili} \quad \gamma_2 = 21°27'.$$

[2] Umjesto pamćenja triju srodnih formula korisnije je zapamtiti formulu prema smislu: površina trokuta jednaka je polovici umnoška stranice i visine na tu stranicu, odnosno omjer duljine stranice i sinusa njoj suprotnog kuta jednak je promjeru opisane kružnice.

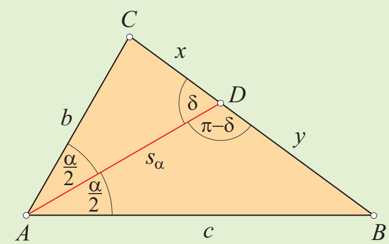
Simetrale kutova

Označimo sa s_α duljinu simetrale kuta α u trokutu ABC.

Poučak o simetrali kuta

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli suprotnu stranicu u omjeru jednakom omjeru duljina stranica što zatvaraju taj kut:

$$x : y = b : c.$$



Označimo elemente kao na slici. Prema poučku o sinusima za trokute ABD i ADC je

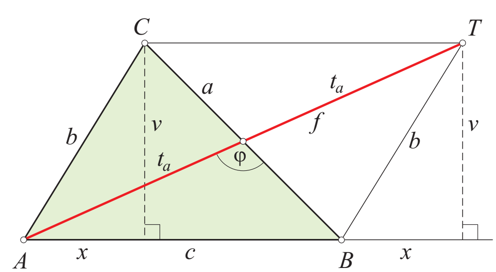
$$\frac{x}{b} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\delta}, \qquad \frac{y}{c} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin(\pi-\delta)} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\delta}.$$

Zato je $\dfrac{x}{b} = \dfrac{y}{c}$, a odavde $\dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{c}$ i poučak je dokazan.

Zadatak 2. Izračunaj duljinu simetrale kuta uz osnovicu jednakokračnog trokuta ako je duljina kraka 15 cm, a kut pri vrhu trokuta je $52°35'$.

Težišnice

Neka je dan trokut ABC. Produžimo težišnicu iz vrha A tako da bude $|AT| = 2t_a$. Četverokut $ABTC$ je paralelogram (jer mu se dijagonale raspolavljaju).



Kut $\sphericalangle ABT$ iznosi $180° - \alpha$ pa po poučku o kosinusu vrijedi

$$4t_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Međutim, znamo da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ pa zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo:

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

Cikličnom zamjenom dobivamo izraze za preostale dvije težišnice:

$$4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$
$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Shvativši ove tri jednakosti kao sustav jednadžbi s nepoznanicama a, b i c, moći ćemo izračunati:

$$a^2 = \frac{4}{9}(2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2). \tag{5}$$

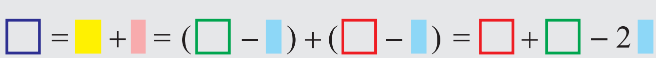
Cikličnom zamjenom dobivamo izraze za stranice b i c:

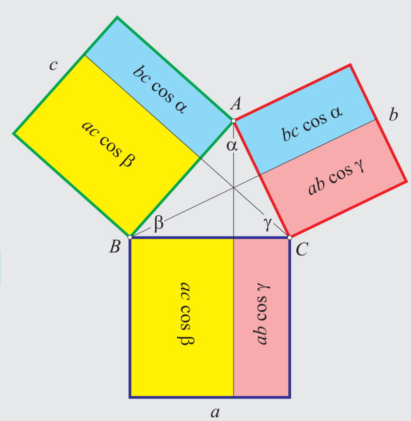
$$b^2 = \frac{4}{9}(2t_a^2 + 2t_c^2 - t_b^2)$$
$$c^2 = \frac{4}{9}(2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2).$$

Zadatak 3. Odredi kut β trokuta ABC ako je $t_b = 5$ cm, $t_c = 2.5$ cm i $a = 4$ cm.

Zadatak 4. Koliki kut zatvaraju težišnice povučene iz vrhova B i C trokuta ABC ako je $a = 4.5$ cm, $b = 3.8$ cm, $c = 5.1$ cm?

JOŠ JEDAN DOKAZ POUČKA O KOSINUSU





Zadatci 6.4.

1. Izračunaj površinu trokuta ABC ako je zadano:

1) $a = 11.4$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 47°15'$;
2) $b = 5$ cm, $c = 7$ cm, $\alpha = 95°$;
3) $a = 22.5$ cm, $c = 30$ cm, $\beta = 30°$.

2. Izračunaj površinu trokuta ABC ako je zadano:

1) $a = 11.5$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 78°$;
2) $b = 4.8$ cm, $\alpha = 18°30'$, $\gamma = 115°22'$;
3) $c = 25.2$ cm, $\alpha = 77°30'$, $\beta = 53°$.

3. Ne rabeći džepno računalo izračunaj površinu trokuta ABC ako je:

1) $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$, $\alpha = 45°$;
2) $a = 1 + \sqrt{3}$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$;
3) $b = 2$, $c = \sqrt{3} - 1$, $\beta = 135°$;
4) $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} - 1$.

4. Ako nijedna od triju stranica trokuta nije veća od 1 cm, površina tog trokuta nije veća od $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Dokaži!

5. Površina trokuta iznosi 33 cm^2, a dva su njegova kuta $53°16'$ i $62°18'$. Kolika je duljina najkraće stranice ovog trokuta?

6. Ako je zadana površina $P = 14\text{ cm}^2$ trokuta ABC i dva njegova kuta, $58°22'$ i $64°48'$, odredi duljinu najdulje stranice trokuta.

7. Površina trokuta iznosi 20 cm^2. Dva su njegova kuta $30°$ i $45°$. Kolike su duljine stranica ovog trokuta?

8. Površina trokuta je 148 cm^2, a dva su njegova kuta $\alpha = 22°35'$ i $\beta = 45°18'$. Kolika je duljina najkraće stranice sličnog trokuta površine 333 cm^2?

9. Površina trokuta je 112 cm^2. Duljine njegovih dviju stranica su 15 cm i 18 cm. Kolika je duljina najdulje stranice sličnog trokuta čija je površina 252 cm^2?

10. Odredi duljine stranica b i c te kutove trokuta ABC ako je $P = 142\text{ cm}^2$, $a = 35.2$ cm, $\alpha + \beta = 98°15'$.

11. Površina trokuta je $P = 30.2\text{ cm}^2$, umnožak stranica je $a \cdot b = 64\text{ cm}^2$ te $\alpha = 42°25'$. Odredi duljine stranica i kutove trokuta.

12. Površina trokuta ABC je 25 cm^2, umnožak ab duljina stranica a i b iznosi 58 cm^2, a za kutove α i β vrijedi $\sin\alpha = \cos\beta$. Odredi duljine stranica i kutove trokuta.

13. Odredi površinu trokuta ABC ako je $b + c = 11.5$ cm, $a = 2.5$ cm i $\alpha = 23°$.

14. Izračunaj površinu trokuta ABC ako je $a - b = 20$ cm, $c = 40$ cm i $\gamma = 60°$.

— ◆ —

15. Ako je duljina stranice c trokuta ABC 11 cm, zatim $\alpha = 70°40'$ te $v_a = 5$ cm, kolika je duljina stranice b ovog trokuta?

16. Trokut ABC zadan je sa $a = 18$ cm, $b = 20$ cm, $v_b = 11$ cm. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

17. Duljine visina trokuta su 8 cm, 12 cm i 18 cm. Kolike su duljine stranica i koliki su kutovi ovog trokuta?

18. Odredi duljine stranica trokuta ABC ako je $v_a = 8.7$ cm, $v_b = 10.3$ cm te $\gamma = 48°35'$.

19. Omjer duljina visina v_a i v_b na stranice a i b trokuta ABC je $5 : 7$, a $\alpha = 66°$. Koliki su ostali kutovi trokuta?

— ◆ —

20. Duljine dviju stranica trokuta su 7.5 cm i 11 cm, a duljina polumjera trokutu opisane kružnice iznosi 8.2 cm. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

21. Ako je u trokutu ABC zadano $a = 32$ cm, $R = 18$ cm, $\gamma = 33°$, odredi ostale stranice i kutove trokuta.

22. Izračunaj duljine stranica trokuta ABC ako je $\alpha = 36°25'$, $\beta = 51°28'$, a duljina polumjera trokutu opisane kružnice iznosi 24 cm.

23. Ako su $\alpha = 70°$ i $\beta = 49°$ dva unutarnja kuta trokuta ABC, a $R = 11$ cm duljina trokutu opisane kružnice, kolika je površina trokuta?

24. Duljina polumjera trokutu ABC opisane kružnice je 7 cm, a opseg trokuta iznosi 25 cm te je $\beta = 46^\circ$. Kolike su duljine stranica trokuta?

25. U trokutu ABC je $c = 11$ cm, $R = 12$ cm te $\beta = 50^\circ 33' 28''$. Kolika je površina trokuta?

— ◆ —

26. Duljine stranica trokuta ABC u omjeru su $4 : 5 : 8$. Polumjer trokutu opisane kružnice iznosi 9 cm. Kolika je površina trokuta?

27. Kolika je površina trokuta ABC ako je $\alpha = 50^\circ 12'$, $\beta = 74^\circ 35'$, a duljina polumjera upisane kružnice iznosi 2.5 cm?

28. U trokutu ABC je $r = 3$ cm, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Kolika je površina trokuta?

29. Ako je $a = 10$ cm, $b + c = 15$ cm te $r = 1$ cm, kolike su duljine stranica b i c trokuta ABC?

30. Na zidu visokom 4 m nalazi se stup visine 6 m. Koliko je od podnožja zida udaljena točka iz koje se zid i stup vide pod jednakim kutom?

31. Simetrala kuta β, $\beta = 60^\circ$ trokuta ABC sije-če nasuprotnu stranicu $\overline{AC}$ u točki D te je $|CD| : |AD| = 3 : 5$. Kolika su ostala dva kuta trokuta?

32. Odredi duljinu stranice b trokuta ABC ako je $s_\alpha = 11$ cm, $c = 15$ cm, $\beta = 41^\circ 20'$.

33. Kolika je duljina stranice c trokuta ABC ako je $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 65^\circ$, $s_\gamma = 13.5$ cm?

34. Dva su kuta trokuta ABC 44° i 72°. Duljina dijela simetrale trećeg kuta koji je unutar trokuta iznosi 15 cm. Kolika je duljina stranice nasuprot tom trećem kutu?

35. U trokutu ABC je $|AB| = 15$ cm, $|BC| = 22$ cm, te $\beta = 73^\circ 28'$. Kolike su duljine odsječaka na koje simetrala kuta β dijeli stranicu $\overline{AC}$?

— ◆ —

36. U trokutu ABC je $b = 12.4$ cm, $c = 17.2$ cm, $t_a = 11$ cm. Izračunaj duljinu stranice a ovog trokuta.

37. Koliki je kut γ u trokutu ABC ako je $a = 6$ cm, $c = 11$ cm, $t_b = 8$ cm?

38. Koliki su kutovi trokuta ABC ako je $a = 3.5$ cm, $b = 2$ cm, $t_c = 2.2$ cm?

39. Izračunaj duljinu stranice c trokuta ABC ako je $a = 32$ cm, $b = 20$ cm i $t_c = 18$ cm.

40. Koliki su kutovi trokuta ABC ako su duljine težišnica tog trokuta 11 cm, 12 cm i 13 cm?

41. Izračunaj duljine stranica a i c trokuta ABC ako je $b = 7.2$ cm, $t_a = 8$ cm, $t_c = 5.8$ cm.

42. Izračunaj duljinu stranice b trokuta ABC ako je $a = 70$ mm, $t_b = 82$ mm, $t_c = 58$ mm.

43. Koliki je kut γ u trokutu ABC ako je $a = 8$ mm, $t_b = 9$ mm, $t_c = 6.6$ mm.

44. Odredi duljine stranica a i b te kutove trokuta ABC ako je $c = 18.8$ cm, $t_c = 14.2$ cm i $v_c = 11.8$ cm.

TOČNO-NETOČNO PITALICE

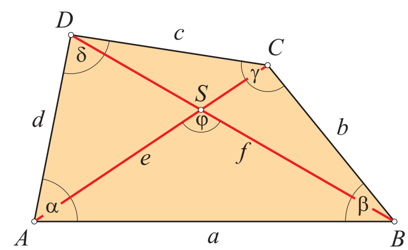
Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Jedna je stranica trokuta dvostruko dulja od druge, a kut nasuprot manje iznosi 25°. Slijedi da je kut nasuprot veće stranice manji od 55°.
2. Duljine dviju stranica trokuta su 11 cm i 15 cm. Ako je kut nasuprot većoj od ovih stranica 73°, kut nasuprot manjoj iznosi približno $33^\circ 13'$.
3. Omjer duljina dviju stranica trokuta je $5 : 8$. Kut nasuprot većoj od njih dvostruko je veći od kuta nasuprot manjoj stranici. Kosinus tog većeg kuta je 0.28.
4. Duljine dviju stranica trokuta su 6 cm i 9 cm, a kosinus kuta nasuprot trećoj stranici iznosi 0.6. Površina ovog trokuta je $43.2\ \text{cm}^2$.
5. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta i ako je $a^2 + b^2 < c^2$, kut nasuprot stranici c je šiljast.
6. Najveći kut trokuta ABC, $A(-2, -1)$, $B(2, -4)$, $C(4, 0)$ iznosi $79^\circ 42'$.
7. Bilo koja od visina trokuta uvijek je kraća od neke njegove stranice.
8. Ako za visine trokuta vrijedi $v_a : v_b = 3 : 4$ i $v_b : v_c = 2 : 3$, onda je stranica c dvostruko dulja od stranice a.

6.5. Četverokut

Četverokut

Stranice četverokuta, njegove kutove i dijagonale obično označavamo kao na slici.

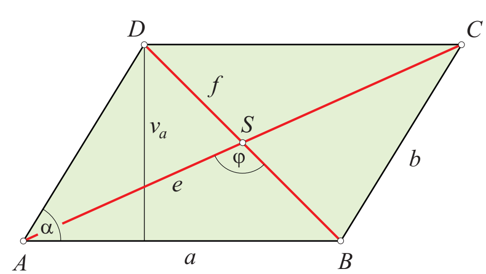


Četverokut je određen ako poznajemo pet njegovih osnovnih elemenata (stranica ili kutova), no među njima smiju biti najviše tri kuta jer je četvrti kut određen iz prvih triju. Ako četverokut ima još neko posebno svojstvo, broj se potrebnih elemenata smanjuje. Tako je, primjerice, trapez određen četirima elementima jer je zbroj dvaju kutova uz njegove krakove jednak $180°$. Isto vrijedi i za tetivni četverokut u kojem je zbroj nasuprotnih kutova $180°$ te za tangencijalni četverokut u kojem su zbrojevi nasuprotnih stranica jednaki. Paralelogram je određen trima elementima jer je uz dvije njegove stranice dovoljno poznavati jedan njegov kut. Romb je određen stranicom i kutom, pravokutnik dvjema stranicama, a kvadrat jednom stranicom.

Paralelogram

Rješavanje paralelograma najčešće se svodi na rješavanje trokuta na koji taj paralelogram dijeli jedna ili obje njegove dijagonale.

Neka su zadane stranice a i b paralelograma te njegov kut α. Odredimo duljine njegovih dijagonala e i f te površinu P.



Dijagonale računamo poučkom o kosinusu:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Odavde zbrajanjem slijedi korisna veza

Dijagonale i stranice paralelograma

Između duljina dijagonala i stranica paralelograma vrijedi relacija

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Površinu paralelograma kojemu znamo duljine stranica i kut računamo ovako:

$$P = av_a = ab\sin\alpha.$$

Sva četiri trokuta na koja paralelogram dijele njegove dijagonale imaju istu površinu (zašto?). Zato je korisno znati da vrijedi i ova formula:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}ef\,\sin\varphi.$$

Površina paralelograma

Površinu paralelograma računamo preko duljina njegovih stranica i kuta među njima:

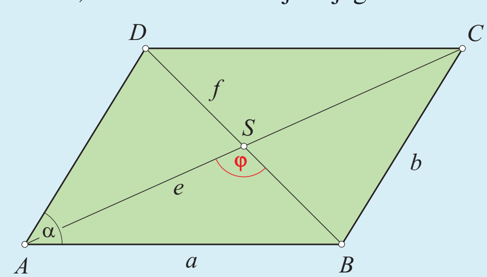
$$P = ab\sin\alpha$$

ili preko duljina dijagonala i kuta među njima:

$$P = \frac{1}{2}ef\,\sin\varphi.$$

Primjer 1.

Duljine stranica paralelograma su 15.2 cm i 8.5 cm. Ako je jedan kut paralelograma $66^\circ 12'$, koliki kut zatvaraju dijagonale?



Najprije *poučkom o kosinusu* primijenjenom na trokute ABD i ABC izračunamo duljine dijagonala paralelograma:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,\quad f^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Primijeti da je $\alpha + \beta = 180°$ te je $\beta = 180° - \alpha$ i zbog toga je $\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Nakon uvrštavanja danih podataka dobijemo $e = 14.1$ cm i $f = 20.19$ cm.

Ponovno primijenimo *poučak o kosinusu*, ali sada na trokut ABS:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi$$

i dobijemo $\varphi = 123°55'$. No kut dvaju pravaca manji je od dvaju kutova što ga ti pravci tvore, pa bi rješenje zadatka u skladu s tim bio kut od $56°5'$.

Zadatak 1. Šiljasti kut paralelograma iznosi $77°12'$, a duljine stranica su 15.5 cm i 9.8 cm.

Izračunaj duljine dijagonala paralelograma.

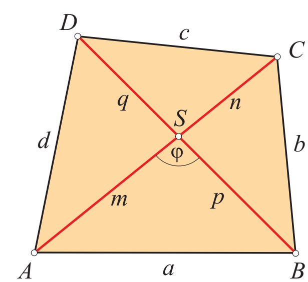
Koliki kut zatvaraju dijagonale paralelograma?

Kolika je površina paralelograma?

Površina četverokuta

Površinu bilo kojeg četverokuta možemo izračunati ako mu poznajemo duljine dijagonala i kut među njima.

Podijelimo četverokut $ABCD$ dijagonalama na četiri trokuta. Površina četverokuta jednaka je zbroju površina tih trokuta:



$$P(\triangle ABS) = \frac{1}{2}mp\sin\varphi,$$

$$P(\triangle BCS) = \frac{1}{2}pn\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}pn\sin\varphi,$$

$$P(\triangle CDS) = \frac{1}{2}nq\sin\varphi, \quad P(\triangle DAS) = \frac{1}{2}qm\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}qm\sin\varphi.$$

Zbrojimo li sada te četiri površine, dobit ćemo:

$$P(ABCD) = \frac{1}{2}(mp + pn + nq + qm)\sin\varphi.$$

No, možemo pisati: $mp+pn+nq+qm = p(m+n)+q(m+n) = (m+n)(p+q)$. A kako je $m+n = |AC| = e$ i $p+q = |BD| = f$, konačno je:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}ef\sin\varphi.}$$

Površina četverokuta jednaka je polovici umnoška duljina dijagonala i sinusa kuta između njih.

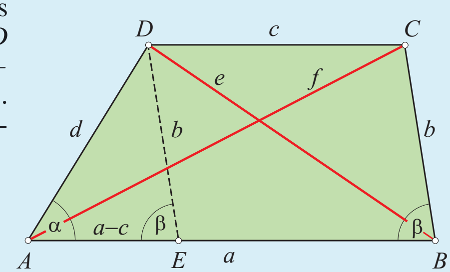
Trapez

Povučemo li vrhom D paralelu s drugim krakom trapeza, dobivamo karakteristični trokut kojem su stranice $a-c$, b i d, a kutovi uz osnovicu α i β.

Primjer 2.

Odredimo kutove i dijagonale trapeza kojem su osnovice $a = 6$ cm i $c = 4$ cm, a krakovi $b = 3$ cm i $d = 4$ cm.

Kroz vrh D povucimo paralelu s krakom b. Dobili smo trokut AED kojem znamo sve tri stranice, $a - c = 2$ cm, $b = 3$ cm i $d = 4$ cm. Kut α računamo iz poučka o kosinusu:



$$\cos\alpha = \frac{4^2+2^2-3^2}{2\cdot4\cdot2} = 0.6875$$

pa je $\alpha = 46°34'$.

Kut pri vrhu E jednak je kutu β:

$$\cos\beta = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2} = -0.25$$

i odavde $\beta = 104°29'$. Dijagonale računamo također poučkom o kosinusu:

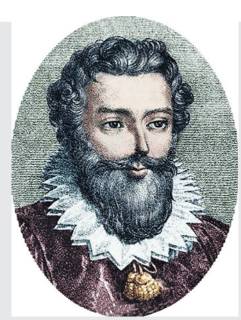
$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = 19 \implies e = \sqrt{19}\text{ cm}$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = 54 \implies f = \sqrt{54}\text{ cm.}$$

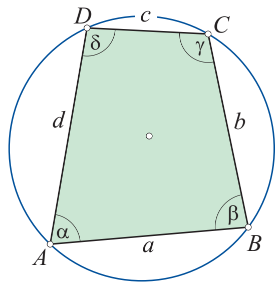
Zadatak 2. Izračunaj površinu trapeza ako su mu zadane duljine osnovica $a = 23.44$ cm i $c = 11.26$ cm i ako su $\alpha = 70°18'$ i $\beta = 57°40'$ kutovi uz njegovu osnovicu.

FRANÇOIS VIÈTE

François Viète (1540. – 1603.) francuski je matematičar, po profesiji pravnik. Drži se osnivačem algebre. 1591. g. po prvi put uvodi označavanje slovima ne samo nepoznanica, već i koeficijenata jednadžbi, omogućivši tako zapisivanje rješenja algebarskih jednadžbi s pomoću općih formula, onako kako to i danas radimo. U trigonometriji je pokazao kako se određuju nepoznati elementi trokuta, ravninskog i sfernog, ako su poznata tri njegova podatka. Otkrio je rastav izraza $\cos nx$ i $\sin nx$ po potencijama od $\sin x$ i $\cos x$.



Tetivni četverokut



Tetivni četverokut je četverokut upisan kružnici. Osnovni poučak o tetivnom četverokutu kaže da su njegovi nasuprotni kutovi suplementni. Drugim riječima, zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta iznosi 180°.

Primjer 3.

Odredimo kutove tetivnog četverokuta ako su zadane duljine njegovih stranica $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $c = 9$ cm i $d = 11$ cm.

Primijenimo *poučak o kosinusu* na trokute ABD i BCD:

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma.$$

No, četverokut $ABCD$ je tetivni te je $\alpha + \gamma = 180^\circ$ i zbog toga $\cos\gamma = -\cos\alpha$.

Kad to uvažimo u gornjoj jednakosti, ona prima oblik:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Očito, odavde možemo odrediti kut α. Bit će $\alpha = 94^\circ 24'$.

Zatim imamo: $\gamma = 180^\circ - \alpha = 85^\circ 36'$.

Na jednak način nastavljamo s određivanjem ostalih dvaju kutova četverokuta.

Zadatak 3. Dva su šiljasta kuta trapeza 80° i 67°. Duljine osnovica iznose 15 cm i 11 cm. Kolike su duljine krakova trapeza? Izračunaj površinu trapeza.

U elektroničkom dijelu udžbenika riješi dodatne zadatke vezane uz četverokut.

Zadatci 6.5.

1. Duljine stranica paralelograma su 11.5 cm i 16.8 cm, a jedan unutarnji kut paralelograma iznosi $135°16'$. Kolike su duljine dijagonala paralelograma?

2. Duljine dijagonala paralelograma su 6.4 cm i 11 cm, a duljina jedne njegove stranice iznosi 7 cm. Koliki je kut između dijagonala paralelograma?

3. Duljine dijagonala paralelograma su 12.4 cm i 18.6 cm, a zatvaraju kut od $83°15'$. Kolike su duljine stranica paralelograma?

4. Duljine stranica paralelograma su 15 cm i 20 cm, a duljina jedne njegove dijagonale iznosi 32 cm. Koliki su unutarnji kutovi paralelograma i kolika je duljina njegove druge dijagonale?

5. Duljine stranica paralelograma su 32 cm i 38 cm, a duljina jedne dijagonale je 27 cm. Koliki su unutarnji kutovi paralelograma?

6. Duljine stranica paralelograma su 11 cm i 7.2 cm, a njegova površina iznosi 52 cm^2. Kolike su duljine dijagonala paralelograma?

7. Površina paralelograma je 14.8 cm^2, a duljine dijagonala su 5 cm i 8 cm. Kolike su duljine stranica i koliki su unutarnji kutovi paralelograma?

8. Dijagonala paralelograma dijeli njegov unutarnji kut na dijelove od $45°$ i $60°$. U kojem su omjeru duljine stranica paralelograma?

— ◆ —

9. Dijagonala jednakokračnog trapeza dugačka je 75 cm i dijeli unutarnji kut trapeza na dva dijela od $36°$ i $80°$. Kolike su duljine stranica trapeza?

10. Duljine osnovica trapeza su $a = 7.2\text{ cm}$ i $c = 3\text{ cm}$, a duljine krakova $b = 5.5\text{ cm}$ i $d = 3.8\text{ cm}$. Koliki su unutarnji kutovi trapeza i kolike su duljine dijagonala trapeza?

11. Duljine osnovica trapeza su 12.5 cm i 4 cm, a dva su šiljasta kuta $72°$ i $58°$. Izračunaj površinu tog trapeza.

12. Duljine dijagonala trapeza su 13 cm i 18 cm, a kut između dijagonala iznosi $\varphi = 109°45'$. Kolika je površina trapeza?

13. Jednakokračnom trapezu može se upisati kružnica i njezin je polumjer dugačak 6 cm. Ako je šiljasti kut trapeza $80°$, kolika je duljina dijagonale trapeza?

— ◆ —

14. U tetivnom četverokutu je $a = 8\text{ cm}$, $b = 9\text{ cm}$, $c = 13\text{ cm}$, $d = 10\text{ cm}$. Izračunaj mu kutove i površinu.

15. U tetivnom je četverokutu $a = 7\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$, $\alpha = 35°6'54''$, $R = 5\text{ cm}$. Izračunaj b, d i β.

16. U tetivnom je četverokutu zadano $b = 5.1\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$, $d = 3.6\text{ cm}$ i $R = 4.25\text{ cm}$. Koliki su njegovi kutovi?

17. U tetivnom je četverokutu zadano $a = 6\text{ cm}$, $b = 2.5\text{ cm}$, $c = 5.6\text{ cm}$ i $e = 6.5\text{ cm}$. Izračunaj njegove kutove, stranicu d, dijagonalu f i površinu P.

18. U tetivnom je četverokutu zadano $a = 40$, $b = 30$, $c = d = 13$, $f = 37$. Izračunaj njegove kutove.

— ◆ —

19. Tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ iste kružnice sijeku se u točki M pod kutom od $83°$. Ako je $|AB| = 24\text{ cm}$ te $|CM| = 8\text{ cm}$ i $|MD| = 12\text{ cm}$, koliki je opseg četverokuta $ADBC$?

20. U četverokutu $ABCD$ kutovi pri vrhovima B i D su pravi. Iz vrhova A i C položene su okomice na dijagonalu $\overline{BD}$, a njihova nožišta su točke E i F. Dokaži da je $|BF| = |DE|$.

Riješi zadatke s državne mature koji su tematski vezani uz ovo poglavlje.