Osnove matematičke logike

Uvod

Osnovni element matematičke logike (booleove algebre) je IZJAVA za koju se može ustanoviti je li ISTINITA ili LAŽNA.

Istinitost i laž neke izjave može se označiti na više načina. U informatici, zbog povezivanja sa zapisom brojeva u računalu, istinitost i laž izjava označavat ćemo znamenkama 0 i 1. Istinitu izjavu označit ćemo s 1, a lažnu s 0.

Primjeri izjava:

Danas je prvi dan jeseni.
Pada kiša.
U torbi nosim kišobran.
Redovno učim i pripremam se za državnu maturu
Položit ću državnu maturu s odličnim ocjenama.
Upisat ću željeni fakultet.
Za svaku od prethodno navedenih rečenica možemo utvrditi jesu li istinite ili lažne. Isto tako, između istinitosti pojedinih izjava može postojati veza.

Možemo reći da će izjava "Upisat ću željeni fakultet." biti istinita ako su istinite obje izjave: "Redovno učim i pripremam se za državnu maturu." i "Položit ću državnu maturu s odličnim ocjenama."

To znači da izjave možemo povezati LOGIČKIM operacijama. Jednako kao što brojeve možemo povezati aritmetičkim operacijama.

Logičkim operacijama izračunavamo istinitost logičkih izraza na temelju istinitosti početnih izjava.

Osnovne logičke operacije

U osnovne logičke operacije pripadaju: logička operacija NE (negacija), logička operacija I (logičko množenje, konjunkcija) i logička operacija ILI (logičko zbrajanje, disjunkcija).

LOGIČKA OPERACIJA I (konjunkcija)

Logička operacija I (konjunkcija) uključuje dvije izjave i istinita je samo ako su obje izjave ISTINITE.

Postoji više načina označavanja logičkih operacija. Pošto logičku operaciju I nazivamo i logičko množenje, označavat ćemo ju znakom "·"

Isto tako, nije praktično je da izjave zapisujemo kao rečenice. Zbog toga ćemo svaku rečenicu zamijeniti jednim slovom (najčešće velikim, ali nije uvjet).

Tako, umjesto da pišemo dvije rečenice (primjerice "Redovno učim i pripremam se za državnu maturu." i "Položit ću državnu maturu s odličnim ocjenama.") logičku operaciju I koju primjenjujemo na izjave:

A = "Redovno učim i pripremam se za državnu maturu." i

B = "Položit ću državnu maturu s odličnim ocjenama."

možemo zapisati ovako: Z=A·B. Z je rezultat logičke operacije.

Tablice istinitosti (tablice stanja)

Umjesto definicije logičke operacije na način na koji smo to napravili u prvoj rečenici, ona se može definirati tzv. TABLICOM ISTINITOSTI ili TABLICOM STANJA.

Tablica istinitosti, odnosno, tablica stanja definira istinitost cjelokupne logičke operacije zasnovane na istinitosti izjava uključenih u tu operaciju.

U prva dva stupca tablice istinitosti nalaze se sve moguće kombinacije istinitosti između dvije izjave (laž, laž; laž, istina; istina, laž; i istina, istina). Kako bi se izbjegle pogreške kombinacije izjava (s dvije izjave) uvijek se popunjavaju u takvom redoslijedu.

|  |  |
| --- | --- |
| A | B |
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |

Tablica stanja logičke operacije I stoga izgleda ovako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | A · B |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Iz tablice stanja logičke operacije I možemo pročitati definiciju koju smo naveli na početku: rezultat logičke operacije I je istina (1) samo ako su obje izjave uključene u operaciju istinite (1).

LOGIČKA OPERACIJA ILI (disjunkcija)

Logička operacija ILI (disjunkcija) također uključuje dvije izjave. Istinita je ako je barem jedna od njih ISTINITA.

Logičku operaciju ILI nazivamo i logičko zbrajanje i označavamo ju znakom "+".

Tablica stanja logičke operacije ILI:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | A + B |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

LOGIČKA OPERACIJA NE (negacija)

Logička operacija NE (negacija) uključuje samo jednu izjavu. Istinita je ako je početna izjava neistinita.

Tablica stanja logičke operacije NE:

|  |  |
| --- | --- |
| A | $$\overbar{A}$$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Složeni logički izrazi

Osnovne logičke operacije često se kombiniraju u složene logičke izraze.

Primjer složenoga logičkoga izraza:

Z = A · B + C · B

Poznavajući definicije i (ili) tablice istinitosti osnovnih logičkih operacija lako možemo napraviti tablicu istinitosti zadanog složenog logičkoga izraza.

Kod izrade tablice istinitosti složenog logičkog izraza potrebno je poznavati:

* Prioritet izvršavanja osnovnih logičkih operacija i
* Koliko različitih kombinacija postoji za zadan broj izjava

Prioritet izvršavanja osnovnih logičkih operacija

Kada imamo više logičkih operacija, a one nisu odvojene zagradama, najprije ćemo napraviti negaciju, zatim logičko množenje (I), a tek na kraju zbrajanje (ILI). Operacije istog prioriteta izvršavamo s lijeva na desno.

Broj kombinacija u složenom logičkom izrazu

Broj kombinacija ovisi o broju različitih izjava. Kako svaka izjava može poprimiti stanje 1 ili 0, postoji 2broj izjava različitih kombinacija.

Ako imamo dvije izjave (A i B) postoje četiri različite kombinacije "nula" i "jedinica".

U našem primjeru imamo tri izjave (A, B, C), odnosno 8 kombinacija.

Postavlja se pitanje: kako popuniti početne vrijednosti u tablici istinitosti, a da budemo sigurni da smo uzeli u obzir sve kombinacije i da niti jednu nismo ponovili?

Za prethodni primjer početne kombinacije u tablici istinitosti popunjavamo ovako:

Imamo tri izjave, što znači osam kombinacija.

Za popunjavanje prvog stupca prepolovimo broj kombinacija (8:2=4) i prvu polovicu (prve četiri) popunimo nulama, dok drugu polovicu popunimo jedinicama.

U sljedećem stupcu (izjava B) prepolovimo onaj "prepolovljeni" broj iz prethodnoga stupca (4:2=2).

Sada popunjavamo stupac najprije s dvije nule, pa dvije jedinice, pa dvije nule i na kraju dvije jedinice.

Zadnji stupac popunjavamo tako da kombiniramo nulu, pa jedinicu dok ne dođemo do kraja (opet smo broj 2 iz prethodnog stupca podijelili s dva)

Pogledajmo kako to izgleda u tablici:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | C |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Za četiri izjave imamo 16 kombinacija. Prvi stupac popunjavamo sa osam nula i osam jedinica, a zatim opet za svaki sljedeći prepolovimo broj iz prethodnog stupca (8, pa 4, pa 2 i na kraju 1).

Napravimo konačno tablicu istinitosti za naš primjer. Kako množenje ima veći prioritet od zbrajanja, ne možemo ići redom. Najprije moramo izračunati A∙B, zatim B∙C i tek na kraju zbrojiti dobivene rezultate. Slično kao u matematici, zar ne?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | A∙B | B∙C | A∙B+A∙C |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Zadatci za vježbu:

Napravi tablice istinitosti za sljedeće složene logičke izraze:

1. $Z=\overbar{\overbar{A+ \overbar{B}}+ \overbar{\overbar{A} ∙\overbar{B}}}$
2. $Z=A+\overbar{\overbar{A ∙ \overbar{B+C}} ∙(\overbar{B} ∙C)}$

Pojednostavljivanje složenih logičkih izraza

Rješavanje prethodnog zadatka iziskivalo je puno vremena i stupaca tablice što povećava vjerojatnost pogreške prilikom rješavanja. Zbog toga se, primjenom nekoliko jednostavnih pravila, većina složenih logičkih izraza može pojednostavniti te tablicu istinitosti napraviti za tako pojednostavljen izraz.

Osnovna pravila pojednostavljivanja dana su u sljedećoj tablici:

|  |
| --- |
| $$̿=A$$ |
| $$A ∙0=0$$ | $$A+0=A$$ |
| $$A ∙A=A$$ | $$A+A=A$$ |
| $$A ∙1=A$$ | $$A+1=1$$ |
| $$A ∙\overbar{A}=0$$ | $$A+\overbar{A}=1$$ |
| $$A ∙\left(A+B\right)=A$$ | $$A+\left(A∙B\right)=A$$ |
| $$A ∙\left(\overbar{A}+B\right)=A ∙B$$ | $$A+\left(\overbar{A}∙B\right)=A+B$$ |
| De Morganovo pravilo |
| $$\overbar{A ∙B}= \overbar{A}+ \overbar{B}$$ | $$\overbar{A∙B}= \overbar{A}+ \overbar{B}$$ |
| Komutativnost |
| $$A ∙B=B ∙A$$ | $$A∙B=B∙A$$ |
| Distributivnost |
| $$A ∙\left(B+C\right)=A ∙B+A ∙C$$ | $$A+\left(B ∙ C\right)=\left(A+B\right)∙\left(A+C\right)$$ |
| $$\left(A+B\right)∙\left(C+D\right)=A∙C+A∙D+B∙C+B∙D $$ |

Primijenimo sada ova pravila i pojednostavnimo izraz $Z=\overbar{\overbar{A+ \overbar{B}}+ \overbar{\overbar{A} ∙\overbar{B}}}$

Korak 1.

Primijenimo De Morganovo pravilo na negaciju izraza:

$$Z=̿ ∙ ̿$$

Korak 2.

Primijetimo da se negacije „poništavaju, pa je $̿=A+ \overbar{B}$, a $̿= \overbar{A }∙\overbar{B}$

To znači da je $Z=\left(A+ \overbar{B}\right) ∙ \overbar{A }∙\overbar{B}$

Korak 3.

Pomnožimo li $\overbar{A }∙\overbar{B}$ s izrazom u zagradi dobijemo da je

$$Z=A ∙ \overbar{A} ∙ \overbar{B}+ \overbar{B} ∙ \overbar{A} ∙ \overbar{B}$$

Korak 4.

Znamo da je $A ∙ \overbar{A}=0$ i $A ∙0=0$. Iz toga slijedi da je prvi dio izraza jednak nuli.

Isto tako, znamo da je $A ∙A=A$. To znači da je drugi dio izraza jednak $\overbar{A} ∙ \overbar{B}$, što je i konačno rješenje našeg zadatka. Ovaj izraz možemo dodatno pojednostavniti primjenom De Morganova zakona, pa je

$$Z= \overbar{A+B}$$

Zadatci za vježbu:

Napravi tablicu istinitosti za dobiveni izraz i usporedi ju s tablicom zadatka 1 iz prethodne lekcije.

Pojednostavni složeni logički izraz $A+\overbar{\overbar{A ∙ \overbar{B+C}} ∙(\overbar{B} ∙C)}$. Za pojednostavljeni izraz napravi tablicu istinitosti. Usporedi rješenje s rješenjem zadatka 2 iz prethodne lekcije.

Konjunktivna i disjunktivna normalna forma

U logici ne moramo uvijek krenuti od izraza prema tablici istinitosti. Problem se može postaviti i obrnuto: za danu tablicu istinitosti potrebno je napisati logički izraz.

Za rješavanje takvih problema koristimo konjunktivnu i disjunktivnu normalnu formu.

Konjunktivna normalna forma

Postupak za dobivanje izraza je sljedeći:

U tablici istinitosti gledamo samo one redove u kojima je rezultat nula

U svakom od tih redova zbrajamo varijable, ali s tim da varijable čija je vrijednost jedan negiramo (one čija je vrijednost nula samo prepišemo).

Na kraju dobivene sume pomnožimo.

Primjer:

Na osnovi tablice istinitosti odredimo konjunktivnu normalnu formu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

U tablici istinitosti gledamo samo one redove u kojima je rezultat nula

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

U svakom od tih redova zbrajamo varijable, ali s tim da varijable čija je vrijednost jedan negiramo (one čija je vrijednost nula samo prepišemo).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |   |
| 0 | 0 | 0 | A+B |
| 0 | 1 | 1 |   |
| 1 | 0 | 0 |  Ā+B |
| 1 | 1 | 1 |   |

Na kraju dobivene sume pomnožimo.

f(A, B)= (A+B)\*(Ā+B)

Disjunktivna normalna forma

Postupak za dobivanje izraza je sljedeći:

U tablici istinitosti gledamo samo one redove u kojima je rezultat jedan

U svakom od tih redova množimo varijable, ali s tim da varijable čija je vrijednost nula negiramo (one čija je vrijednost jedan samo prepišemo).

Na kraju dobivene umnoške zbrojimo.

Primjer:

Na osnovi tablice istinitosti odredimo disjunktivnu normalnu formu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

U tablici istinitosti gledamo samo one redove u kojima je rezultat jedan

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

U svakom od tih redova množimo varijable, ali s tim da varijable čija je vrijednost nula negiramo (one čija je vrijednost jedan samo prepišemo).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |  |
| 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | Ā∙B |
| 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 1 | A∙B |

Na kraju dobivene umnoške zbrojimo.

f(A, B)= (Ā∙B)+(A∙B)

Napomena: hoćemo li rabiti konjunktivnu ili disjunktivnu normalnu formu, ovisi o tome ima li u tablici manje nula ili jedinica!

Zadatci za vježbu:

Na osnovu sljedećih tablica istinitosti odredite konjunktivnu i disjunktivnu normalnu formu.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | f(A,B) |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | f(A,B,C) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |