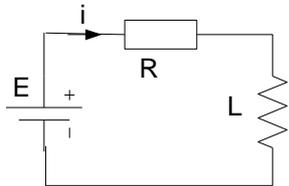


3. PRIJELAZNE POJAVE

3.1. Prijelazne pojave u mreži s otporom i induktivitetom

Serijski spoj otpora i induktiviteta:



Naponska jednađba:

$$E = u_R + u_L; \quad L \frac{di}{dt} + i \cdot R = E \quad (3.1)$$

Struja kroz R i L:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R}{L}} \right) \quad (3.2)$$

Napon na induktivitetu:

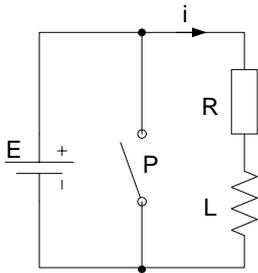
$$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t \cdot R}{L}} \quad (3.3)$$

Napon na otporu:

$$u_R = E - u_L = E \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R}{L}} \right) \quad (3.4)$$

Energija na induktivitetu:

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{2} \quad (3.5)$$

Kratki spoj RL

Naponska jednađžba:

$$u_R = -u_L; L \frac{di}{dt} + i \cdot R = 0 \quad (3.6)$$

Struja kruga:

$$i = i(0) \cdot e^{-\frac{t \cdot R}{L}} \quad (3.7)$$

Napon na induktivitetu:

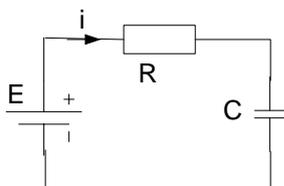
$$u_L = L \frac{di}{dt} = -R \cdot i(0) \cdot e^{-\frac{t \cdot R}{L}} \quad (3.8)$$

Energija na otporu:

$$W_R = \frac{L \cdot i^2(0)}{2} \quad (3.9)$$

3.2. Prijelazne pojave u mreži s otporom i kapacitetom

Serijski spoj otpora i kondenzatora:



Naponska jednađžba:

$$E = u_R + u_C; \quad RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (3.10)$$

Struja kroz R i C:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.11)$$

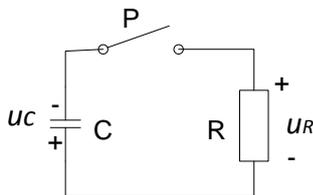
Napon na otporu:

$$u_R = E e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.12)$$

Napon na kondenzatoru:

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \quad (3.13)$$

Izbijanje kondenzatora:



Naponska jednađžba:

$$0 = u_R + u_C \quad (3.14)$$

Napon na kondenzatoru:

$$u_C = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.15)$$

Napon na otporu:

$$u_R = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.16)$$

Struja izbijanja:

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.17)$$

AV3-Z1: Krug se sastoji od serijski spojenog svitka $L = 0,1$ H i otpornika $R = 10 \Omega$ priključenih na izvor istosmjernog napona $U = 100$ V. Odrediti vrijeme u toku kojeg struja dosegne 90 % svoje stacionarne vrijednosti. Kolika je brzina porasta struje u trenutku uključivanja i u trenutku kada struja ima 90 % stacionarne vrijednosti.

Rješenje:

Prema jednačbi 3-2 struja kroz otpor i induktivitet iznosi:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Iz ovog izraza nađemo vrijeme t :

$$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln \left(1 - i_L \cdot \frac{R}{E} \right)$$

Maksimalna vrijednost struja nastupa pri $t = \infty$, odnosno $I_m = E/R = 100/10 = 10$ (A)

Kod 90 % stacionarne vrijednosti struja iznosi:

$$I(90\%) = 0,9 \cdot \frac{E}{R} = 0,9 \cdot 10 = 9 \text{ (A)}$$

Vrijeme za koje je to potrebno iznosi:

$$t(90\%) = -\frac{L}{R} \cdot \ln \left(1 - I(90\%) \cdot \frac{R}{E} \right) = -\frac{0,1}{10} \cdot \ln \left(1 - 9 \cdot \frac{10}{100} \right) = 0,023 \text{ (s)}$$

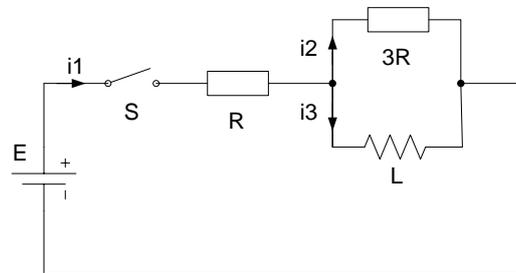
Brzina porasta di/dt u trenutku uključivanja iznosi:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L} = \frac{100}{0,1} = 1000 \left(\frac{A}{s} \right)$$

A kod $t = 23$ ms brzina porasta je:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L} = \frac{100}{0,1} e^{-\frac{10}{0,1} \cdot 0,023} = 100 \left(\frac{A}{s} \right)$$

AV3-Z2: Strujni krug na slici 3.1. priključuje se na izvor istosmjernog napona. Nacrtati krivulju promjene struja u krugu – $i_1(t)$; $i_2(t)$ i $i_3(t)$ i odrediti odgovarajuće izraze.



Sl. 3.1.

Rješenje:

Primjenjujući jednađžbe 1. i 2. KZ dobivamo:

$$u_L - i_2 \cdot 3R = 0; \quad E - i_1 \cdot R - u_L = 0; \quad i_1 = i_2 + i_3$$

Kombiniranjem ovih jednađžbi dobiva se diferencijalna jednađžba preko struje i_3 :

$$\frac{L}{3} \cdot \frac{di_3}{dt} + L \frac{di_3}{dt} + i_3 \cdot R = E \Rightarrow \left(\frac{L}{3} + L \right) \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 \cdot R = E \quad (3-18)$$

Ovu linearnu diferencijalnu jednađžbu prvog reda možemo riješiti seperacijom varijabli:

$$\frac{di_3}{E - R \cdot i_3} = \frac{3 \cdot dt}{4 \cdot L}$$

Opće rješenje je:

$$E - R \cdot i_3 = K \cdot e^{-\frac{3R}{4L}t} \quad (3-19)$$

Uz početne uvjete za $t=0$, $i_3=0$ iz gornje jednađžbe dobivamo konstantu K:

$$K = E$$

Uvrštavanjem K u (3-19) i uzimajući da je vremenska konstanta $\tau = \frac{4L}{3R}$, može se za i_3 pisati:

$$i_3(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (A)$$

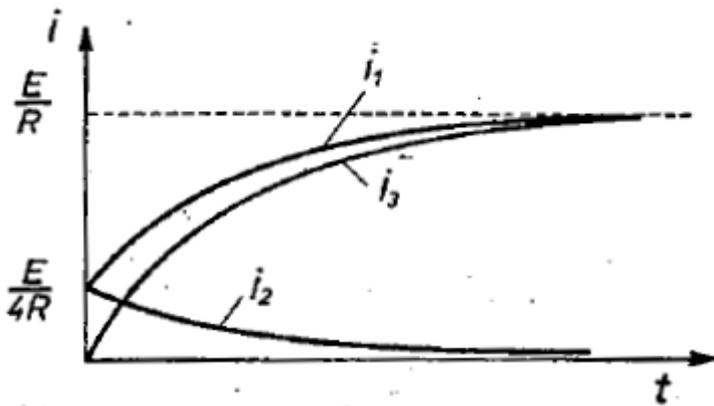
Struju i_2 dobijemo iz 2. KZ:

$$i_2 = \frac{u_L}{R} = \frac{L}{3R} \cdot \frac{di_3}{dt} = \frac{L}{3R} \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{4R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (A)$$

Iz 1. KZ struja i_1 je:

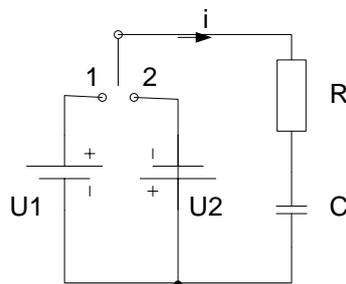
$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{E}{4R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (A)$$

Valni oblici struja prikazani su na slici 3.1.1



Slika 3.1.1

AV3-Z3: U krugu prema slici 3.4. sklopka S stavlja se u trenutku $t = 0$ u položaju 1. Nakon $t' = \tau$ prebačena je u položaj 2. Odrediti i nacrtati funkciju $i(t)$ ako su vrijednosti elemenata $R = 500 \Omega$; $C = 0,5 \mu\text{F}$; $U_1 = 20 \text{ V}$ i $U_2 = 40 \text{ V}$.



Sl. 3.4.

Rješenje:

Za položaj „1“ struja u krugu je prema izrazu (3-11):

$$i(t) = \frac{U_1}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nakon vremena $t'=\tau$ gdje je $\tau=RC=0,00025$ (S) struja iznosi:

$$I' = \frac{U_1}{R} \cdot e^{-\frac{t'}{RC}} = 0,04 \cdot e^{-4000\tau} = 0,014 \text{ (A)}$$

Napon na kondenzatoru je:

$$U_C(\tau) = U_1 \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) = 20 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) = 12,6 \text{ (V)}$$

Nakon prebacivanja sklopke u položaj „2“ jednadžba kruga glasi:

$$U_2 + u_C - i_2 \cdot R = 0 \Rightarrow U_2 + u_C(\tau) + \frac{1}{C} \int_{\tau}^{t_2} i_2(t_2) dt - i_2 \cdot R = 0$$

Ako jednadžbu integriramo po dt dobijemo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama

$$\frac{i_2}{C} = -R \cdot \frac{di_2}{dt}$$

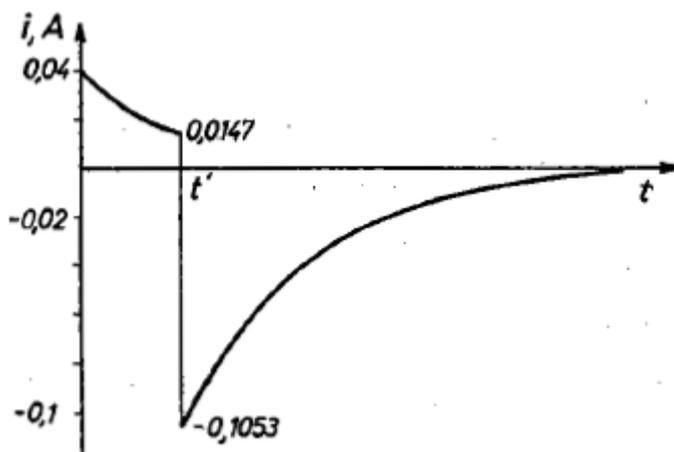
Struja i_2 pri uključivanju sklopke u položaj „2“ jednaka je:

$$t' = \tau \Rightarrow i_2(\tau) = -\frac{U_2 + u_C(\tau)}{R} = -0,105 \text{ (A)}$$

Konačno rješenje diferencijalne jednadžbe uz uvjet $t'=\tau$, $i_2(\tau) = -0,105$ (A) glasi:

$$i_2(t) = -0,105 \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}} \text{ (A)}$$

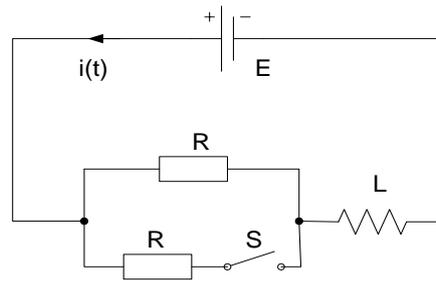
Vremenski dijagram struje u krugu prikazuje slika 3.4.1



Slika: 3.4.1

AV3-Z4: Nakon uspostavljanja stacionarnog stanja zatvaramo sklopku S (slika 3.2.).

Prikazati krivulju $i(t)$ i napisati izraz za struju kroz svitak.



Sl. 3.2.

Rješenje:

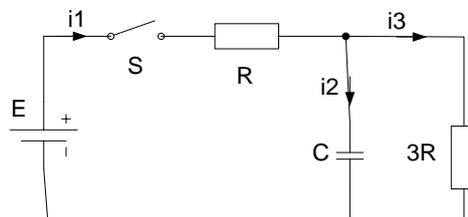
$$i \cdot \frac{R}{2} + L \cdot \frac{di}{dt} = E; \quad i = \frac{E}{R} \cdot \left(2 - e^{-\frac{R}{2L}t} \right) \text{ (A)}$$

AV3-Z5: U krugu serijski su spojeni kondenzator $C = 2 \mu\text{F}$ i otpornik $R = 1000 \Omega$. Krug je priključen na konstantan napon. U trenutku $t_1 = 0,002 \text{ s}$ nakon priključenja, napon na kondenzatoru postigne vrijednost $U_1 = 200 \text{ V}$. Nakon koliko vremena će napon na kondenzatoru postignuti vrijednost $U_2 = 250 \text{ V}$.

Rješenje:

$$t_2 = 3,1 \text{ (ms)}; \quad E = 317,4 \text{ (V)}$$

AV3-Z6: Spoj prema slici 3.3. priključuje se na izvor istosmjernog napona. Nacrtati krivulju promjene svih struja u mreži i napona na kondenzatoru. Izvesti izraz za struje.



Sl. 3.3.

Rješenje:

$$i_1 = \frac{E}{4R} \cdot \left(1 + 3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad i_2 = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad i_3 = \frac{E}{4R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad \tau = \frac{3RC}{4}$$

LITERATURA

- [1] Branislav Kuzmanović, „Osnove elektrotehnike II“, Zagreb ELEMENT, 2000
- [2] Ivan Felja-Danira Koračin, „Zbirka zadataka i rješениh primjera iz osnova elektrotehnike 1. i 2. dio“, Zagreb, Školska knjiga 1985.
- [3] Gordan Đurović, „Elektrotehnika I i II-Zbirka zadataka, Zagreb, 2004.
- [4] E. Šehović, M. Tkalić, I. Felja, Osnove elektrotehnike - zbirka primjera, I dio“, Školska knjiga, Zagreb, 1984.