

7. SINUSOIDALNE STRUJE I NAPONI

7.1. Rezonancija

Uvjet rezonancije:

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = 0; \quad \operatorname{Im}(\underline{Y}) = 0 \quad (7.1)$$

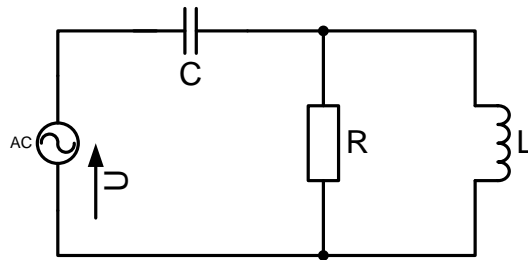
Fazni kutevi pri rezonanciji:

$$\varphi_U = \varphi_I; \quad \varphi_Z = \varphi_Y = \varphi_S = 0 \quad (7.2)$$

Dobrota reaktivnog elementa:

$$Q_s = \frac{U_L}{U_R}; \quad Q_p = \frac{I_L}{I_R} \quad (7.3)$$

AV7-Z1: Spoj (slika 7.1.) je u rezonanciji; pri tome je $Z(\omega)=0,8 \Omega$, a $R = 4 \Omega$. Odredite X_L i X_C .



Sl. 7.1.

Rješenje:

Ukupna impedancija kruga je:

$$\underline{Z}_{RL} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}$$

$$\underline{Z}_{RL} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \left(\frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} - X_C \right)$$

Impedancija pri rezonanciji ima samo realni dio, odnosno rezonantni otpor Z_0 iz kojeg se nađe reaktancija X_L koja je uvijek pozitivan broj:

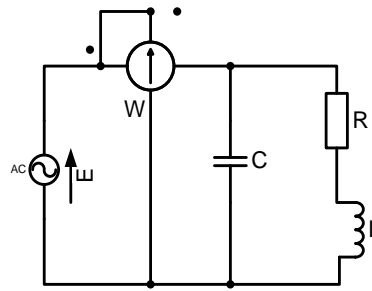
$$Z_0 = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} \Rightarrow X_L = 2 (\Omega)$$

Iz imaginarnog dijela impedancije kapacitivna reaktancija X_C iznosi:

$$j \left(\frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} - X_C \right) = 0; \Rightarrow X_C = 1,6 (\Omega)$$

Iz poznatog prividnog otpora (impedancije) pri rezonanciji lako nađemo reaktanciju X_L . Sama reaktancija bilo da je kapacitivna ili induktivna je uvijek pozitivan broj

AV7-Z2: U shemi prema slici 7.2. struja i napon izvora su u rezonanciji kod $f = 60 \text{ Hz}$, pri čemu vatmetar pokazuje 100 W . Zadano je $R = 16 \Omega$ i $X_L = 12 \Omega$. Treba odrediti kapacitet C te struje u vremenskom obliku kao i njihove efektivne vrijednosti.



Sl. 7.2.

Rješenje:

Ukupna admitancija kruga:

$$\underline{Z}_{RL} = R + jX_{XL} = 16 + j12 = 20 / 36,87^{\circ} (\Omega)$$

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} = 0,04 - j0,03 = 0,05 / -36,87^{\circ} (S)$$

U rezonanciji su reaktivne vodljivosti jednake:

$$B_C = 0,03 = \frac{1}{X_C} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \Rightarrow C = 7,95 \cdot 10^{-5} (F)$$

Vatmetar mjeri ukupnu djelatnu snagu kruga koja se razvija samo na otporu R, pa je struja kroz otpor:

$$I_{RL} = \sqrt{\frac{P_W}{R}} = 2,5 (A)$$

Kako su sve veličine dane u efektivnim vrijednostima, jedan fazni pomak neke veličine možemo odabrati po volji, neka to bude napon izvora u fazi nula $\varphi_u = 0$: Na osnovu toga odredi se fazni pomak struje:

$$\underline{I}_{RL} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{RL}} = \frac{E / 0^{\circ}}{20 / 36,87^{\circ}} = 2,5 / 36,87^{\circ} = 2 - j1,5 (A)$$

Vremenski zapis ove struje je:

$$i_{RL}(t) = \sqrt{2} \cdot 2,5 \cdot \sin(377t - 36,87) (A)$$

Napon izvora iznosi:

$$\underline{E} = \underline{I}_{RL} \cdot \underline{Z}_{RL} = 50 / 0^{\circ} (V)$$

Struja kroz kondenzator C je:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}}{-jX_C} = j1,5 (A)$$

U vremenskom zapisu:

$$i_c(t) = \sqrt{2} \cdot 1,5 \cdot \sin(377t + 90^\circ) \text{ (A)}$$

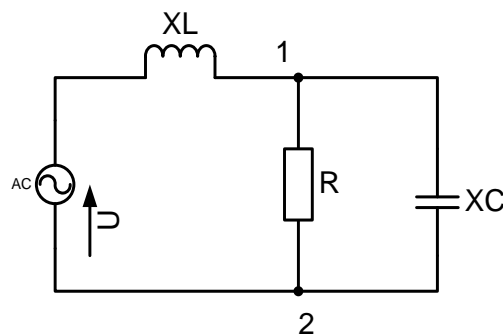
Ukupna struja iznosi:

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_{RL} = 2 \text{ (A)}$$

A vremenski zapis:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin(377t) \text{ (A)}$$

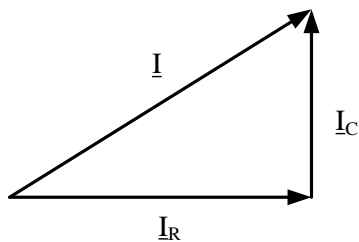
AV7-Z3: Spoj (slika 7.3a.) je u rezonanciji, $U = 40 \text{ V}$, $U_L = 30 \text{ V}$ i $U_{12} = 50 \text{ V}$. Snaga koju uzima spoj je $P = 200 \text{ W}$. Treba naći R , X_L i X_C .



Sl. 7.3a

Rješenje:

Iz fazorskog dijagrama (slika 7.3.b) vidi se da struje \underline{I} , \underline{I}_R i \underline{I}_C čine pravokutni trokut



Slika: 7.3.b

Kako se radna snaga troši samo na otporu R , njegova vrijednost se nađe iz snage i napona U_{12} :

$$R = \frac{U_{12}^2}{P} = 12,5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Impedancija paralelnog spoja R i C iznosi:

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{R \cdot X_C^2}{R^2 + X_C^2} - j \frac{R^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2} \quad (\Omega)$$

Ukupna impedancija je:

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot X_C^2}{R^2 + X_C^2} + j \left(X_L - \frac{R^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2} \right) \quad (\Omega)$$

U rezonanciji otpor je jednak realnom dijelu impedancije:

$$Z_0 = \frac{R \cdot X_C^2}{R^2 + X_C^2} \quad (\Omega)$$

pa je iznos ukupne struje:

$$I = \frac{U}{Z_0} = \frac{U \cdot (R^2 + X_C^2)}{R \cdot X_C^2}$$

Iz trokuta struja slijedi:

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 \Rightarrow \frac{U^2 \cdot (R^2 + X_C^2)}{R^2 \cdot X_C^4} = U_{12}^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2} \right)$$

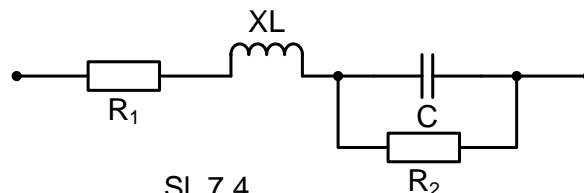
Iz ovoga nađe se X_C :

$$X_C = \frac{R^2 \cdot X_C}{U_{12}^2 - U^2} = 16,66 \quad (\Omega)$$

Iz uvjeta rezonancije da je imaginarni dio jednak nuli odredi se X_L :

$$X_L = \frac{R^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2} = 6 \quad (\Omega)$$

AV7-Z4: Izračunajte rezonantnu frekvenciju kruga sastavljenog prema slici 7.4. ako je $L = 20$ mH, $C = 0,4 \mu\text{F}$ i $R_2 = 500 \Omega$.

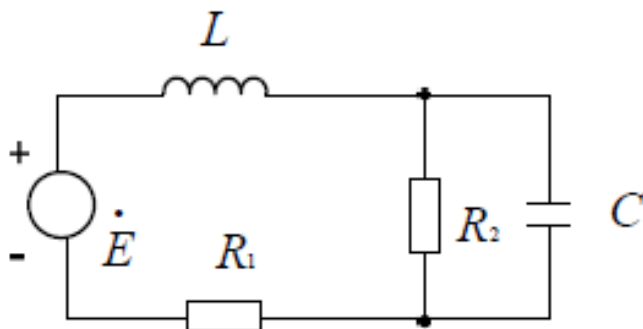


Sl. 7.4.

Rješenje:

$$\left(\omega = \frac{\sqrt{CR_2^2 - L}}{R_2 C \sqrt{L}} = 10000 \text{ s}^{-1}, f_0 = 1591 \text{ Hz}\right)$$

AV7-Z5: U shemi na slici 7.5 nastaje rezonancija pri frekvenciji $f = 400 \text{ Hz}$. Ako je zadano $E = 50 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 20 \text{ W}$ i $C = 10 \text{ mF}$, treba odrediti L i struju i_C .



Slika 7.5

Rješenje:

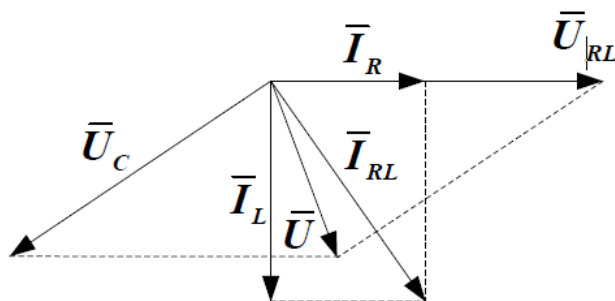
$$L = 3,19 \text{ (mH)}; \quad i_C = 0,88 \sin(2513,27t + 63,31^\circ)$$

AV7-Z6: Potrebno je izvesti izraz za rezonantnu frekvenciju spoja na slici i nacrtati fazorski dijagram za slučaj kada ukupna struja prethodi naponu izvora.

Rješenje:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 \cdot C \cdot L - L^2}} \text{ (Hz)}$$

Fazorski dijagram dan je na slici 7.6



Slika 7.6

LITERATURA

- [1] Branislav Kuzmanović, „Osnove elektrotehnike II“, Zagreb ELEMENT, 2000
- [2] Ivan Felja-Danira Koračin, „Zbirka zadataka i rješениh primjera iz osnova elektrotehnike 1. i 2. dio“, Zagreb, Školska knjiga 1985.
- [3] Gordan Đurović, „Elektrotehnika I i II-Zbirka zadataka, Zagreb, 2004.
- [4] E. Šehović, M. Tkalić, I. Felja, Osnove elektrotehnike - zbirka primjera, I dio“, Školska knjiga, Zagreb, 1984.