

9. METODE ZA RJEŠAVANJE SLOŽENIH STRUJNIH KRUGOVA

9.1. Nortonov i Theveninov teorem

Teorijski uvod

a) Postupak za Norton

1. Dio mreže ili element za koji tražimo struju se odspoji i računa se impedancija Z_N gledano sa tih odspojenih stezaljki, vodeći računa da se u mreži svi naponski izvori kratko spoje a strujni otvore.
2. Odspojene stezaljke se kratko spoje i računa se struja I_N kroz tako spojene stezaljke
3. Računa se nadomjesni Nortonov izvor $U_N = I_N * Z_N$
4. Na kraju tvorimo novu mrežu sastavljenu od Nortonovog izvora U_N , impedancije Z_N i dijela mreže koju smo odpojili. Iz te mreže računamo struju kroz odspojeni dio

b) Postupak za Thevenin

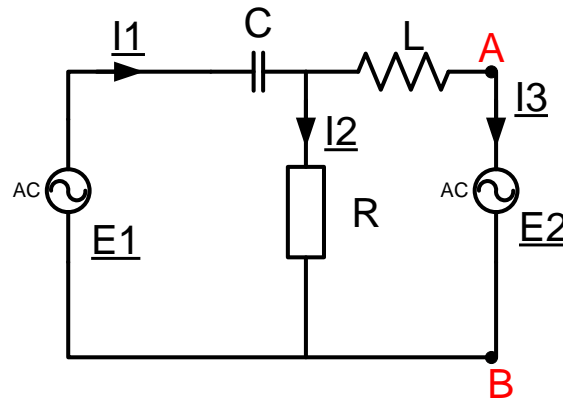
1. Dio mreže ili element za koji tražimo struju se odspoji i računa se impedancija Z_T gledano sa tih odspojenih stezaljki, vodeći računa da se u mreži svi naponski izvori kratko spoje a strujni otvore.
2. Na odspojenim stezaljkama računamo nadomjesni Thevenonov napon U_T
3. Na kraju tvorimo novu mrežu sastavljenu od Theveninovog izvora U_T , impedancije Z_T i dijela mreže koju smo odpojili. Iz te mreže računamo struju kroz odspojeni dio

Iz gore izloženog slijedi:

$$Z_N = Z_T$$

$$U_N = U_T$$

AV9-Z1: Nortonovim i Theveninovim teoremom odrediti struju \underline{I}_3 u zadanoj mreži (*zadatak Z1 AV8*) na Slici 9.1. Zadano je: $\underline{E}_1 = 100/0^\circ$; $\underline{E}_2 = 100/90^\circ$; $R = X_L = 5 \Omega$; $X_C = 2 \Omega$.



Sl. 9.1

Rješenje:

a) NORTON

1. Odvojimo dio mreže na mjestu AB i računamo \underline{Z}_{AB} , naponski izvor E1 kratko spojimo

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_N = jX_L + \frac{-jX_C \cdot R}{-jX_C + R} = 0,69 + j3,27 (\Omega)$$

2. Stezaljke AB kratko spojimo i računamo struju kratkog spoja \underline{I}_N

$$\underline{Z}_{E1} = -jX_C + \frac{jX_L \cdot R}{jX_L + R} = 2,5 + j0,5 (\Omega)$$

$$\underline{I}_{E1} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_{E1}} = 38,46 - j7,7 (A)$$

$$\underline{U}_A = \underline{I}_a \cdot \frac{jX_L \cdot R}{jX_L + R} = 115,38 + j76,92 (V)$$

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_A}{jX_L} = 15,38 - j23,07 (A)$$

3. Nadomjesni Nortonov izvor \underline{U}_N je:

$$\underline{U}_N = \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N = 86,21 + j34,48 (V)$$

4. Na kraju struja \underline{I}_3 iznosi:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_N - \underline{E}_2}{\underline{Z}_N} = -13,84 - j29,23 = 32,3 / -115,35^\circ (A)$$

b) THEVENIN

1. $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N$

$$\underline{Z}_T = 0.6897 + 3.2759i \text{ } (\Omega)$$

2. Theveninov napon U_T na mjestu otvorenih stezaljki AB je:

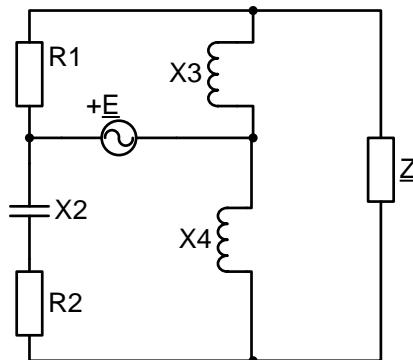
$$\underline{I}_b = \frac{\underline{E}_1}{-jX_C + R} = 17,24 + j6,9 \text{ (A)}$$

$$\underline{U}_T = \underline{I}_b \cdot R = 86,2 + j34,48 \text{ (V)}$$

3. Iz nove nadomjesne mreže sastavljene od izvora U_T , impedancije Z_N i naponskog izvora E_2 struja I_3 je:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_T - \underline{E}_2}{\underline{Z}_N} = -13,84 - j29,23 = 32,3 / -115,35 \text{ (A)}$$

AV9-Z2: U shemi na slici 9.2 odredite struju \underline{I} kroz impedanciju \underline{Z} primjenom: a) Theveninovog i b) Nortonovog teorema. Zadano: $R_1=R_4 = 2 \Omega$, $R_2=3 \Omega$, $X_2 = 4 \Omega$, $X_3 = 2 \Omega$, $X_4 = 3 \Omega$, $\underline{Z} = 5+j \Omega$, $\underline{E} = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$.



SLIKA 9.2

Rješenje:

Struju kroz impedanciju Z odredit ćemo odspajanjem Z i primjenom Theveninovog i Nortonovog teorema. Za Theveninov teorem nađemo Theveninov napon i impedanciju. Ovaj impedanciju računamo od strane odspojenih stezaljki s tim da sve naponske izvore kratko spojimo a strujne otvorimo. Tada su R_1 i X_3 u paraleli, a zatim je ova kombinacija u seriji s paralelom X_4 i $R_2 - jX_3$ tj. :

$$\underline{Z}_T = \frac{R_1 \cdot jX_3}{R_1 + jX_3} + \frac{(R_2 - jX_2) \cdot jX_4}{R_2 - jX_2 + jX_4} = 3,7 + j4,9 \ (\Omega)$$

Struje kroz X_3 i X_4 kod odspojene impedancije Z su:

$$\underline{I}_{13} = \frac{\underline{E}}{R_1 + jX_3} = 9,15 - j34,15 \ (A)$$

$$\underline{I}_{24} = \frac{\underline{E}}{R_2 + jX_4 - jX_2} = 31 - j6,34 \ (A)$$

Thevenonov napon je zbroj padova napona na X_3 i X_4 :

$$\underline{E}_T = \underline{I}_{13} \cdot jX_3 - \underline{I}_{24} \cdot jX_4 = 49,30 - j74,64 \ (V)$$

Na kraju struja kroz Z iznosi:

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}} = -0,10 - j8,50 \ (A)$$

Za Nortonov teorem Nortonova impedancija jednaka je Theveninovoj, a Nortonova struja računa se kroz kratkospojene stezaljke na mjestu odspojene impedancije Z . Nortonovu struju možemo naći metodom konturnih struja:

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_T = 3,7 + j4,9 \ (\Omega)$$

$$\underline{I}_a \cdot (R_1 + jX_3) - \underline{I}_c \cdot jX_3 = \underline{E}$$

$$\underline{I}_b \cdot (R_2 - jX_2 + jX_4) + \underline{I}_c \cdot jX_4 = \underline{E}$$

$$\underline{I}_c \cdot (jX_3 + jX_4) - \underline{I}_a \cdot jX_3 + \underline{I}_b \cdot jX_4 = 0$$

$$\underline{I}_c \cdot (jX_3 + jX_4) - \frac{\underline{E} + \underline{I}_c \cdot jX_3}{R_1 + jX_3} \cdot jX_3 + \frac{\underline{E} - \underline{I}_c \cdot jX_4}{R_2 - jX_2 + jX_4} \cdot jX_4 = 0$$

$$\underline{I}_c = -4,86 - j13,73 = (A) = \underline{I}_N$$

Ukupna admitancija kruga sa nadomjesnim Nortonovim izvorom je:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = 0,19 - j0,038 \ (S)$$

$$\underline{Y}_u = \underline{Y} + \underline{Y}_N = 0,29 - j0,16 \ (S)$$

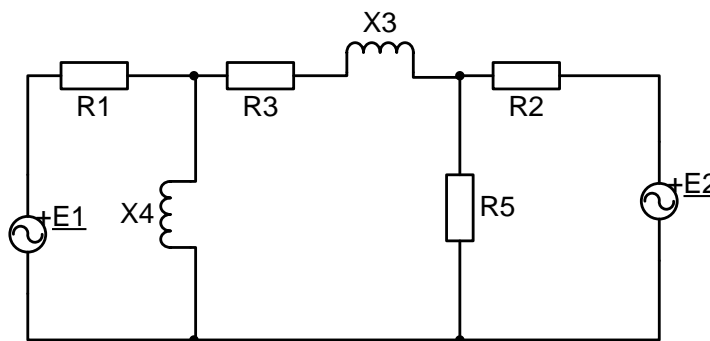
Napon na paraleli nadomjesnog Nortonovog kruga je:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_N}{\underline{Y}_u} = 7,98 - j42,64 \text{ (V)}$$

I konačno struja kroz impedanciju Z:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = 0,10 - j8,50 \text{ (A)}$$

AV9-Z3: U shemi na slici 9.3 zadano je: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3,1 \Omega$, $X_3 = 3,5 \Omega$, $X_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$. Treba odrediti djelatnu snagu na otporu R_3 . Kolika bi morala biti impedancija \underline{Z}_3 da bi otpor R_3 trošio maksimalnu snagu? Kolika je ta snaga?



SLIKA 9.3

Rješenje:

Ovo najlakše možemo riješiti primjenom Theveninovog teorema, odspajanjem grane sa otporima R_3 i X_3 pa je Theveninova impedancija:

$$\underline{Z}_T = \frac{R_1 \cdot jX_4}{R_1 + jX_4} + \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = 4,9 + j2,5 \text{ (\Omega)}$$

$$\underline{I}_{14} = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_4} = 3 - j3 \text{ (A)}$$

$$\underline{I}_{25} = \frac{\underline{E}_2}{R_2 + R_5} = 2 + j0 \text{ (A)}$$

$$\underline{E}_T = \underline{I}_{14} \cdot jX_4 - \underline{I}_{25} \cdot R_5 = 3 + j15 \text{ (V)}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + R_3 + jX_3} = 1,14 + j1,02 \text{ (A)}$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 7,25 \text{ (W)}$$

Maksimalna snaga na otporu R_3 nastaje kad je impedancija Z_3 jednaka konjugirano kompleksnoj Theveninovoj impedanciji prema teoremu maksimalne snage:

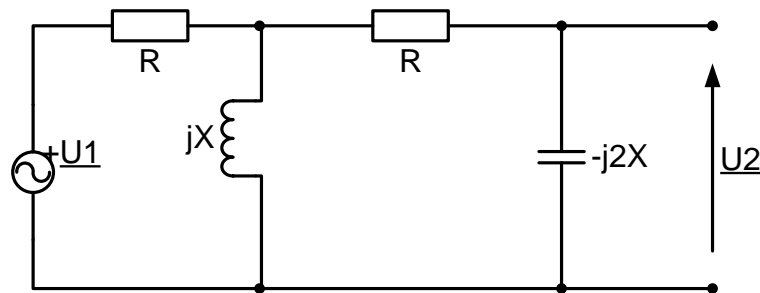
$$\underline{Z}_{3\max} = \underline{Z}_T^*$$

$$\underline{I}_{3m} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_{3\max}} = 0,30 + j1,53 \text{ (A)}$$

Maksimalna snaga na R_3 je:

$$P_{3\max} = I_{3m}^2 \cdot \operatorname{Re}(\underline{Z}_{3\max}) = 11,93 \text{ (W)}$$

AV9-Z4: Izračunajte odnos napona $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ za spoj prema slici 9.4. Zadano je: $R = 2 \Omega$ i $X = 4 \Omega$.



SLIKA 9.4

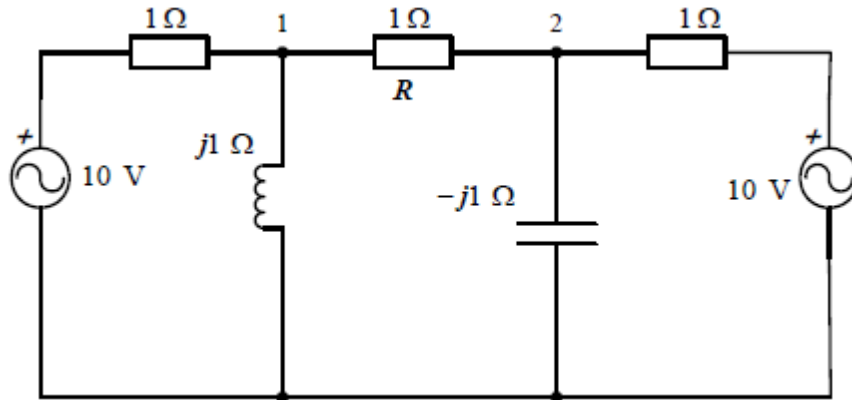
Rješenje:

Zadatak riješiti Thev. Metodom odvajanjem kondenzatora $-j2X$.

$$\underline{Z}_T = 4,9 + j2,5 \text{ (}\Omega\text{)}; \underline{E}_T = 3 + j15 \text{ (A)}; \underline{I}_3 = 1,14 + j1,02 \text{ (A)}$$

$$\underline{Z}_T = 3,6 + j0,8 \text{ (}\Omega\text{)}; \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{2 \cdot X^2}{(R + jX) \cdot (\underline{Z}_T - 2 \cdot jX)} = 0,88$$

AV9-Z5: Potrebno je izračunati napon \underline{U}_{12} u spoju na Slici 9.5 Theveninovim teoremom.



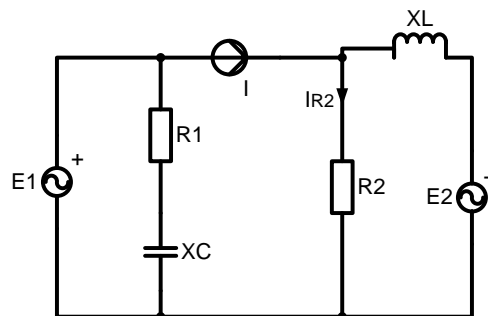
Slika: 9.5

Rješenje:

Odpojiti otpornik u točkama 1 i 2 i izračunati Th. napon i impedanciju, zatim izračunati struju za nadomjesni spoj i na kraju pad napona na otporu R:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I} \cdot R = j5 \text{ (V)}$$

AV9-Z6: Nortonovom metodom odredite struju kroz otpor R2 u shemi na slici 9.6. Zadano je: $e_1(t) = 30\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$ V, $e_2(t) = 80\cos(\omega t)$ V, $i(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$ A, $R_1 = R_2 = X_C = X_L = 8 \Omega$.



SLIKA 9.6

Rješenje:

Odpajanjem otpora R₂ dobivamo:

$$\underline{Z}_N = jX_L = j8 \text{ (}\Omega\text{)}; \underline{I}_k = \underline{I} + \frac{\underline{E}_2}{jX_L} = 7,77 + j0,707 \text{ (A)}$$

$$\underline{U}_k = \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_N = -5,65 + j62,22 \text{ (V)}; \underline{I}_{R2} = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_N + R_2} = 3,53 + j4,24 \text{ (A)}$$

LITERATURA

- [1] Branislav Kuzmanović, „Osnove elektrotehnike II“, Zagreb ELEMENT, 2000
- [2] Ivan Felja-Danira Koračin, „Zbirka zadataka i rješениh primjera iz osnova elektrotehnike 1. i 2. dio“, Zagreb, Školska knjiga 1985.
- [3] Gordan Đurović, „Elektrotehnika I i II-Zbirka zadataka, Zagreb, 2004.
- [4] E. Šehović, M. Tkalić, I. Felja, Osnove elektrotehnike - zbirka primjera, I dio“, Školska knjiga, Zagreb, 1984.